Şiruri_laborator_2009-2010

Considerând *şir de elemente* în **R**, care este o funcţie $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$, putem vorbi despre o reprezentare grafică a şirului, $G_f=\{(n,x_n),n\in\mathbf{N}\}$, unde $x_n=f(n)$, vizualizare ce permite o mai bună înţelegere a noţiunii de convergenţă, respectiv divergenţă.

- Să desenăm primii 100 de termeni ai şirului $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ şi să calculăm utilizând Symbolic Math limita şirului. Să scriem un program pentru a determina limita acestui şir cu o zecimală exactă, respectiv cu două zecimale exacte

```
»n=1:100; plot(n,(1+(1./n)).^n,'k*')
```

Limita unui şir se calculează ca limita unei expresii simbolice într-un punct.

```
»syms n
»limit((1+1/n)^n,n,inf)
ans =
        exp(1)
```

A scrie un program pentru a determina limita acestui şir cu o zecimală exactă, respectiv cu două zecimale exacte înseamnă a găsi rangul termenului începând de la care $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|<\varepsilon$ unde $\varepsilon=0.01$, respectiv $\varepsilon=0.001$. Vom utiliza instrucţiunea while.

Verificăm începând cu $n=1$, dacă $x=\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|$ depăşeşte $\varepsilon=0.01$; dacă da, mărim valoarea lui n, dacă nu, am găsit rangul termenului căutat:

```
»n=1; x=abs((1+(1./n)).^n-exp(1)); while x>.01 n=n+1; x=abs((1+(1./n)).^n-exp(1));end
» [n]
ans =
       135
```

Să calculăm al 135-lea termen, termen care aproximează cu o zecimală exactă numărul e:

```
» n=135;y=(1+(1./n)).^n
y =
       2.7083
```

Prezentăm programul şi calculul efectiv al termenului căutat, pentru $\varepsilon=0.001$:

```
»n=1;x=abs((1+(1./n)).^n-exp(1)); while x>.001 n=n+1; x=abs((1+(1./n)).^n-exp(1));end
» n
ans =
        1359
» n=1359;y=(1+(1./n)).^n
y =
        2.7173
```

- Să reprezentăm grafic primii 100 de termeni ai şirului $x_n=\sqrt[n]{n}$ şi să calculăm în Symbolic Math limita şirului. Să găsim al câtelea termen al şirului aproximează limita cu două zecimale exacte şi să determinăm efectiv acest termen:

```
»n=1:100;plot(n,(n).^(1./n),'k*')
»syms n
»limit(n^(1/n),n,inf)
ans =
        1
```

Vom scrie un program în care om utiliza instrucțiunea while pentru a găsi termenul începând de la care inegalitatea $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|>0.001$ nu mai este adevărată. Vom inițializa programul cu $n=2$.

```
»n=2;x=abs(n.^(1./n)-1); while x>.001 n=n+1; x=abs(n.^(1./n)-1);end
» n
ans =
          9124
» n=9124; y=n.^(1./n)
y =
          1.0010
```

- Să desenăm primii 50 de termeni ai şirului $x_n=n\cdot(\sqrt[n]{5}-1),\ n\geq 2$ şi să calculăm limita şirului. Să aflăm câți termeni ai şirului se află în afara intervalului $(\ln 5-0.001,\ln 5+0.001)$?

```
»n=1:50;plot(n,n.*(5.^(1./n)-1),'k*')
»syms n
» limit(n*(5^(1/n)-1),n,inf)
ans =
          log(5)
```

Pentru a calcula câți termeni ai şirului se află în afara intervalului $(\ln 5-0.001,\ln 5+0.001)$ vom găsi care este rangul începând de la care termenii şirului se află la distanța mai mică de 0.0001 de limita şirului:

```
» n=1;x=abs(n.*(5.^(1./n)-1)-log(5));while x>0.0001 n=n+1;x=abs(n.*(5.^(1./n)-1)-log(5));end
» n=
          12952
```

Aşadar 12952 termeni ai şirului sunt în afara intervalului cerut.

- Să calculăm limita şirului $x_n=\left(\left(\frac{n-2}{n}\right)^n\frac{n^2+1}{2^n},n\cdot(\sqrt[n]{2}-1)\right)$ şi să determinăm câți termeni ai şirului se află în afara bilei de centru $\left(\frac{1}{e^2},0,\ln(2)\right)$ şi rază 0.001?

```
»syms n
»f=[((n-2)/n)^n, (n^2+1)/2^n, n*(2^(1/n)-1)];
»L=limit(f,n,inf)
 L =
          [ exp(-2),       0,  log(2)]
```

Limita şirului fiind centrul bilei din enunț aplicăm definiția limitei unui şir şi astfel vom scrie un program care să calculeze care este rangul termenului începând de la care distanța euclidiană de la acest termen la limita şirului este mai mică decât 0.001.

```
» n=1;x=norm([((n-2)./n).^n, (n.^2+1)./2.^n, n.*(2.^(1./n)-1)]-[exp(-2),0,log(2)]);
while x>0.001 n=n+1; x=norm([((n-2)./n).^n, (n.^2+1)./2.^n, n.*(2.^(1./n)-1)]-[exp(-2),0,log(2)]);end
» n
ans =
          363
```

Deci 363 de termeni ai şirului nu aparțin bilei.

Suntem tentați în scopul simplificării scrierii programului să utilizam următoarea variantă:

```
» n=1; x=norm(f-L);
??? Undefined function or method 'norm' for input arguments of type 'sym'.
```

Răspunsul computerului este clar: în Symbolic Math nu este definită funcţia normă şi astfel va trebui să apelăm la pachetul de bază Matlab.

- Să reprezentăm grafic primii 100 de termeni ai şirului $x_n = \frac{(1+(-1)^n)}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{n}$. Studiind graficul să intuim natura şirului şi apoi să justificăm matematic afirmaţia.

```
» n=1:100;plot(n,(1+(-1).^n)./2.*cos(pi./n),'k*')
```

Subşirul termenilor impari este constant zero, în timp ce subşirul termenilor pari converge la 1, aşadar avem un şir divergent, deoarece dacă şirul ar fi convergent, orice subşir al său ar converge la aceeaşi limită.

- Să studiem convergenţa şirului $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n+1}$ şi să ilustrăm grafic rezultatul obţinut.

Cu criteriul de trecere la limită în inegalităţi din inegalitatea $0 < \left|\frac{1+(-1)^n}{n+1}\right| < \frac{1}{n+1}$ obţinem $0 \le \lim_{n\to\infty} |x_n| \le 0$, deci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

```
»n=1:100;plot(n,(1+(-1).^n).*1./(n+1),'k*')
```

Dacă desenăm doar primii 100 de termeni, din desen avem două subşiruri (par şi impar) care nu sunt convergente la aceeaşi limită (ceea ce înseamnă că şirul nu este convergent), ceea ce contrazice rezultatul obţinut matematic.
Să desenăm primii 300 termeni:

```
»n=1:300;plot(n,(1+(-1).^n).*1./(n+1),'k*')
```

Şirurile de funcţii, par a fi o noţiune nou studiată, dar în clasa a XI-a se calculează limite de şiruri de funcţii, fără a fi definită noţiunea. Pentru o mai bună înţelegere a problemei, considerăm că exerciţiile următoare sunt utile:

- Să desenăm primii 35 de termeni ai şirului de funcţii $f_n : (-1,1] \to \mathbf{R}$, unde $f_n(x) = x^n + 1$; apoi să desenăm în acelaşi sistem de axe (multiplot) termenii $f_{10}, f_{25}, f_{50}, f_{101}$ ai şirului precedent, (fiecare funcţie în altă culoare). În final să calculăm funcţia limită.

```
» x=-1:.01:1; for n=1:35 subplot(7,5,n),plot(x,x.^n,'k'); end
```

Începând cu f_7, funcţiile se apropie din ce în ce mai mult de dreapta $y = 1$, chiar dacă aparent, subşirurile par, respectiv impar au comportări diferite.

```
»x=-1:.01:1;plot(x,x.^10+1,'r',x,x.^25+1,'k*',x,x.^50+1,'b',x,x.^101+1,'g')
```

Funcţia limită este $f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n + 1 = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$.

- Să desenăm primii 9 de termeni ai şirului de funcţii $f_n : [-2,2] \to \mathbf{R}$, unde $f_n(x) = e^{nx}$; apoi să desenăm în acelaşi sistem de axe (multiplot) termenii f_2, f_3, f_4 ai şirului precedent, (fiecare funcţie în altă culoare). În final vom determina funcţia limită.

```
»x=-5:.5:5; for n=1:9 subplot(3,3,n),plot(x,exp(x.*n),'k'); end
```

Începând cu f_5 se observă cât de repede creşte funcţia pentru $x>0$; remarcaţi că $f_3((0,2))\subset(0,4.10^4)$

```
»x=2:.1:2;plot(x,exp(2.*x),'k',x,exp(3.*x),'r*',x,exp(4.*x),'b')
```

Funcţia limită este $f:[-5,0]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} e^{nx}=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\in[-5,0)\end{cases}$.

Pentru $x>0$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} e^{nx}=\infty$

- Vom desena primii 9 de termeni ai şirului de funcţii $f_n:[-5,5]\to\mathbf{R}$, unde $f_n(x)=\dfrac{x^{2n}-x^2+1}{x^{2n}+x^2+3}$, $n\in\mathbf{N}$, apoi vom desena în acelaşi sistem de axe (multiplot) termenii f_2, f_4, f_7 ai şirului precedent. Determinaţi funcţia limită şi desenaţi-o.

```
»x=-5:.5:5;for n=1:9 subplot(3,3,n); plot(x,(1-x.^2-x.^(2.*n))./(3+x.^2+x.^(2.*n)),'k'); end
» x=-5:.1:5;  plot(x,(1-x.^2+x.^(4))./(3+x.^2+x.^(4)),'r',x,(1-x.^2+x.^(8))./(3+x.^2+x.^(8)),'b*',
x,(1-x.^2+x.^(14))./(3+x.^2+x.^(14)),'k--')
```

Funcţia limită este $f:[-5,5]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2+1}{x^2+3}, & |x|<1\\ \dfrac{1}{5}, & |x|=1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

```
»x=-5:.01:-1;x1=-1:.01:1;x2=1:.01:5;  plot(x,1,'k*',x1,(1-x1.^2)./(3+x1.^2),'k*',x2,1,'k*',-1,1/5,'k*',
1,1/5,'k*')
```

- Să desenăm primii 9 de termeni ai şirului de funcţii $f_n:[-3,3]\to\mathbf{R}$ unde $f_n(x)=\dfrac{x^3+xe^{nx}}{2+x^2+3e^{nx}}$, $n\in\mathbf{N}$. Să calculăm funcţia limită şi să desenăm apoi în acelaşi sistem de axe (multiplot) termenii f_1, f_6, f_{14} ai şirului precedent şi funcţia limită.

Funcţia limită este $f:[-3,3]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{2+x^2}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{x}{3}, & x>0\end{cases}$

```
»x=-3:.1:3;for n=1:9 subplot(3,3,n), plot(x,(x.^3+x.*exp(n.*x))./(2+x.^2+3.*exp(n.*x)),'k');end
» x=-3:.1:0;x1=0:.1:3;plot(x,(x.^3)./(2+x.^2),'k',0,0,'k*',x1,x1./3,'k')
```

Probleme propuse

1. Reprezentaţi grafic primii 50 de termeni ai şirului $x_n=\dfrac{2n}{n^3+1}$, $n\geq 0$ calculaţi limita şirului cu Symbolic Math şi apoi scrieţi un program pentru a determina limita acestui şir cu o zecimală exactă, respectiv cu două zecimale exacte **.**

2. Reprezentaţi grafic primii 100 de termeni $x_n=\dfrac{n^2+11}{3^n}\cdot$, $n\geq 0$, calculaţi limita şirului cu Symbolic Math şi scrieţi un program pentru a determina câţi termeni ai şirului se afla în afara intervalului (-0.002,0.002).

3. Reprezentați grafic primii 100 de termeni ai şirului $x_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n, n \geq 1$, calculați-i limita şi determinați cel mai mic termen al şirului care aproximează numărul limita cu două zecimale exacte.

4. Calculați limita şirului $x_n = \left(\frac{2n^2 - 1}{n^2 + 7}, \sqrt[n]{n}, \frac{n^4 + 5}{5^n}\right)$, $n \geq 1$. Câți termeni ai şirului se află în afara bilei de centru (2,1,0) şi rază 0.001?

5. Calculați limita şirului $x_n = \left(\frac{n^2 - 4}{n^4 + 7}, \left(\frac{2n^2 - n + 1}{2n^2}\right)^n, n \cdot (\sqrt[n]{5} - 1)\right)$, $n \geq 1$. Câți termeni ai şirului se află în afara bilei de centru (l_1, l_2, l_3) (unde (l_1, l_2, l_3) este limita calculată anterior) şi rază 0.001?

6. Desenați primii 16 de termeni ai şirului de funcții $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ unde $f_n(x) = \cos^n x, n \in \mathbf{N}$. Desenați în acelaşi sistem de axe (multiplot) termenii f_{13}, f_{26}, f_{32} ai şirului şi funcția limită.

7. Pentru şirul de funcții $(f_n)_n$, unde $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{3x^{2n} - 2x \cdot \ln(x^2 + 1)}{x^{2n+1} + x^2 + 1}$, stabiliți funcția limită şi desenați f_5, f_{12} şi funcția limită în acelaşi sistem de axe.

8. Pentru şirul de funcții $(f_n)_n$, unde $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{n \cdot |x| - 2nx}{nx^2 + nx + 1}$ stabiliți funcția limită şi desenați f_{25}, f_{120} şi funcția limită în acelaşi sistem de axe.