Serii - laborator

- Ştiind că $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$, să scriem un program pentru a afla rangul n_1 începând de la care $|s_n-\frac{\pi^2}{6}|=|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{\pi^2}{6}|<.01, \forall n\ge n_1$ şi apoi să deteminăm s_{n_1}

```
»n=1;S=1;  while abs(S-((pi).^2)./6)>0.01  n=n+1; S=S+1./n.^2;end
» [n,S]
    ans =
    100.0      1.6350
```

- Fie seria $\sum_{n\ge 0}\frac{1}{2^n}$; să scriem un program pentru a determina rangul începând de la care distanţa dintre termenul general al şirului sumelor parţiale s_n şi suma seriei este mai mică decât $\varepsilon=0,0005$.

```
»n=1;S=1;  while abs(S-2)>0.0005  n=n+1; S=S+1./(2.^(n-1));end
» [n,S]
    ans =
     12.0      1.9995
```

- Să scriem un program pentru a determina rangul începând de la care termenul şirului sumelor parţiale $s_n=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ aproximează suma seriei $\sum_{n\ge 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ cu o eroare mai mică decât $\varepsilon=0,01$.

Suma seriei $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=-\ln 2$

```
»n=2;S=log(3/4);  while abs(S+log(2))>0.01  n=n+1;
S=S+log(1-1./n.^2);end
» [n,S]
    ans =
             100.0     -0.6832.
```

Fie $\sum_{n\ge 1}a_n$; pentru calculul lui $s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ în Matlab folosim deseori (dacă nu apar factoriale) funcţia sum($a_{(1:n)}$)

- Am stabilit cu definiţia că seria $\sum_{n\ge 1}\ln\frac{n+1}{n}$ este divergentă. Să calculăm următorii termeni ai şirului sumelor parţiale: $s_{1002}, s_{5000}, s_{9999}$, pentru a ilustra acest lucru:

Putem calcula fiecare s_n în parte:

```
» s(1002)=sum(log((2:1003)./(1:1002)));
    ans =
             6.9108
» s(5000)=sum(log((2:5001)./(1:5000)));
    ans =
             8.5174
» s(9999)=sum(log((2:10000)./(1:9999)));
    ans =
             9.2103
```

Se observă că şirul sumelor parţiale este nemărginit superior şi că avem o creştere destul de lentă.

- Să calculăm în cazul seriei convergente $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ următorii termeni ai şirului sumelor parţiale: $s_{102}, s_{5000,}, s_{10000}$; ştim deja că suma seriei este $-\ln 2 \approx -0.6931$.

```
» sum(log(1-1./(2:10000).^2))
ans =
        -0.6930
```

În paragraful anterior am stabilit convergenţa câtorva serii, utilizând criteriile de convergenţă studiate. Pentru aceste serii vom calcula spre exemplu termenii s_{10000}, s_{10000}, ce vor aproxima suma seriei:

- $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n + \sqrt{n}}$

```
»sum(1./(3.^(0:10000)+sqrt(0:10000)))
   ans =
        1.3990
»sum(1./(3.^(0:100000)+sqrt(0:100000)))
   ans =
        1.3990
```

- $\sum_{n\geq 1} \sin\frac{\pi}{4^n}$

```
»sum(sin(pi./(4.^(1:10000))))
   ans =
        0.9676
»sum(sin(pi./(4.^(1:100000))))
   ans =
        0.9676
```

- $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}\right)$

```
» sum(log(1+1./((1:10000).^(3/2))))
   ans =
         2.1993
»sum(log(1+1./((1:1000000).^(3/2))))
   ans =
        2.2173.
```

Remarcaţi că această serie converge destul de lent.

- $\sum_{n\geq 1} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$

```
»sum(((1+1./(1:10000)).^(1:10000).^2)./3.^(1:10000))
   ans =
        2.2162
»sum(((1+1./(1:100000)).^(1:100000).^2)./3.^(1:100000))
   ans =
        2.2162
```

Să studiem natura seriilor următoare folosind criteriile de convergenţă cunoscute şi în caz de convergenţă aproximaţi suma seriei cu s_{10000}

- $\sum_{n=1} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{n^3}$

$\sin \frac{n\pi}{3}$ nu ia numai valori pozitive şi astfel vom aplica criteriul de comparaţie cu inegalităţi seriei modulelor: deoarece $\frac{|\sin \frac{n\pi}{3}|}{n^3} < \frac{1}{n^3}$, din convergenţa seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ deducem absolut convergenţa seriei.

```
» sum((sin(pi.*(1:10000)./3))./((1:10000).^3))
     ans =
              0.9570
```

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+(0,5)^n}$

Aplicând criteriul de comparaţie cu trecere la limită obţinem $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+(0,5)^n}}{\frac{1}{n}} = 1$, rezultând divergenţa seriei.

- $\sum_{n\geq 1} \arcsin \frac{1}{n^3}$

Din criteriul de compatraţie cu trecere la limită avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} = 1$$

rezultând convergenţa seriei.

```
»sum (asin(1./(1:10000).^3))
     ans =
        1.7732
```

În cazul în care decidem convergenţa seriei folosind criteriul raportului, putem evalua şi eroarea comisă:

- Să stabilim câţi termeni trebuie însumaţi pentru a obţine suma seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{5^n}$ cu două zecimale exacte:

Aplicăm criteriul raportului: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5} < 1$ şi deducem convergenţa seriei.

Avem $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{5n} < \frac{3}{10}$ şi $|R_n| < \frac{|a_n| \cdot \frac{3}{10}}{1-\frac{3}{10}} = \frac{3}{7} \cdot \frac{n}{5^n} < 0.001$; vom scrie un program pentru a găsi cel mai mare număr natural pentru care $\frac{3}{7} \cdot \frac{n}{5^n} > 0.001$:

```
»n=1;x=n./(5.^n); while (3*x)./7>.001 n=n+1; x=n./(5.^n);end
» [n]
ans =
        5.0000
» sum((1:6)./5.^(1:6))
 ans =
```

0.3124

- Să studiem natura seriei $1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}$ şi în caz de convergenţă să aproximăm suma seriei cu două zecimale exacte:

Primul termen al seriei este $a_0=1$, în rest $a_n=\frac{1}{n!}, n\geq 1$; aplicăm criteriul raportului

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, aşadar seria este convergentă.

Avem $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{3}, \forall n\geq 2$ şi $|R_n|<\frac{|a_n|\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)!}<0.001$:

```
» n=1;x=1;while .5*x>.001 n=n+1;x=x*(1/n);end
»  [n]
ans =
      6
```

Pentru a calcula cel de-al 7-lea termen al şirului sumelor parţiale, care aproximează suma seriei cu două zecimale exacte, este nevoie de un program (situaţie valabilă dacă în termenul general al seriei apar factoriale):

```
»suma=1;x =1;for n=1:7 x=x.*(1./n);suma =suma+x;end
» [suma]
ans =
       2.7183
```

- În paragraful 2.2 am stabilit cu criteriul raportului că seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}$ este convergentă; să aproximăm suma seriei cu două zecimale exacte:

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<\frac{1}{2}$., deoarece avem $2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$

şi astfel avem de rezolvat în mulţimea numerelor naturale inecuaţia:

$|R_n|<\frac{n!}{n^n}<0.001$

```
» n=1;x=1;while x>.001 n=n+1;x=x.*n.*((n-1).^(n-1))./(n.^n);end
» [n]
     ans =
        9
```

Aşadar s_{10} aproximează suma seriei cu două zecimale exacte.

```
»suma=1;x =1;for n=2:10 x=x.*n.*((n-1).^(n-1))./(n.^n);suma =suma+x;end
» [suma]
ans =
       1.8796
```

- Să studiem natura seriei $1+\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$ şi în caz de convergenţă, să aproximăm suma seriei prin s_{1000}

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{1}{2n+3}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}=1,$$

aplicăm criteriul Raabe Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty}n.(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty}n.(\frac{(2n+2).(2n+3)}{(2n+1)^2}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2}=\frac{3}{2}$$

şi obţinem astfel convergenţa seriei.

```
» suma=7/6; x=1/6;for n=1:998 x=x.*((2*n+1).^2)./((2*n+2).*(2*n+3));
suma=suma +x;end
» [suma]
ans =
     1.5530
```

În cazul unei serii alternate, a cărei convergenţă o stabilim cu criteriul lui Leibniz, putem evalua eroarea comisă.

- Să studiem natura seriei $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ şi să-i aproximăm suma cu trei zecimale exacte:

  Am stabilit în paragraful 2.2 că seria este convergentă; pentru a determina numărul natural începând de la care $|R_n|<a_{n+1}<10^{-4}$, vom scrie un program pentru a stabili cel mai mic număr natural pentru care $a_{n+1}>0.0001$:

```
» n=1;x=1./(n+1); while x>.0001 n=n+1; x=1./(n+1);end
» [n]
ans =
      9999
» sum(((-1).^(2:10001))./(1:10000))
ans =
     0.6931
```

- Să stabilim natura seriei $\sum_{n\geq 2}(-1)^n\cdot\frac{1}{\ln^2 n}$ şi în caz de convergenţă să-i aproximăm suma cu o zecimală exactă.

  Este o serie convergentă deoarece şirul $a_n=\frac{1}{\ln^2 n}$ este descrescător şi convergent la zero. Să determinăm numărul natural începând de la care $|R_n|<\frac{1}{\ln^2(n+1)}<0.01$:

```
»n=2;x=1./((log(n+1)).^2); while x>.01 n=n+1;
x=1./((log(n+1)).^2);  end
»  [n]
ans =
     22026
»sum(((-1).^(2:22027))./((log(2:22027)).^2))
ans =
     1.5620
```

Pentru a intui comportarea seriilor de funcţii, considerăm că un exerciţiu de grafică ne este de ajutor::

- Să desenăm primii trei termeni ai seriei $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\cdot x^2}{x^4+n^6}$ şi respectiv $s_3(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$ în acelaşi sistem de axe:

```
»  x=-3:.1:3;y1=(-x.^2)./(x.^4+1);y2=(x.^2)./(x.^4+2^6);y3=(-x.^2)./(x.^4+3^6);y=y1+y2+y3;
plot(x,y1,'k.',x,y2,'r-',x,y3,'b',x,y,'g*')
```

- În cazul seriei de funcții $\sum_{n\geq 0} arctg\frac{2x}{x^2+n^2}$ să desenăm în acelaşi sistem de axe $f_5(x)=arctg\frac{2x}{x^2+25}$ şi $s_5(x)=\sum_{k=1}^{5} arctg\frac{2x}{x^2+n^2}$

```
» x=-5:.1:5;y5=atan(2*x./(x.^2+5^2));y=atan(2*x./(x.^2+1))+atan(2*x./(x.^2+2^2))+
atan(2*x./(x.^2+3^2))+atan(2*x./(x.^2+4^2))+atan(2*x./(x.^2+5^2)); plot(x,y5,'r',x,y,'k*')
```

Dacă dorim să desenăm $s_{49}(x)$, lucrurile se complică, aşa că e nevoie de altă abordare: declarăm variabila simbolică x, şi scriem expresia simbolică s_{49}(x). Pentru desenul acesteia folosim funcția ezplot(f,a,b)

```
»syms x
»n=1;s= atan((2*x)./(x.^2+1)); while n<50 n=n+1;
s=s+ atan((2*x)./(x.^2+n.^2)); end
»ezplot(s,-3,3)
```

Seriile de puteri sunt cazuri particulare de serii de funcții:

- Să desenăm în acelaşi sistem de axe al 10-lea termen al seriei de puteri $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\cdot x^n$ şi respectiv al 10-lea termen al şirului sumelor parțiale, al aceleaşi serii:

```
»x=-8:.1:8;y10=(x.^10)./(2*3*4*5*6*7*8*9* 10);y=1+x+(x.^2)./2+
(x.^3)./(2*3)+(x.^4)./(2*3*4)+(x.^5)./(2*3*4*5)+(x.^6)./(2*3*4*5*6)+
(x.^7)./(2*3*4*5*6*7)+(x.^8)./(2*3*4*5*6*7*8)+(x.^9)./(2*3*4*5*6*7*8*9)+(x.^10)./(2*3*4*5*6*7*8*9*10);plo
t(x,y10,'k',x,y,'k*')
```

Am desenat al 10-lea termen al şirului sumelor parțiale, al seriei de puteri $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\cdot x^n$; pentru a desena s_{99}(x) folosim Symbolic math

```
»syms x
»n=1; s=x;n=2;f=x^2/2; s=s+f ;while n<100 n=n+1 ;f=f*x/n;s=s+f;end
» ezplot(s,-5,5)
```

Probleme propuse

1. Fie seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$; scrieți un program pentru a determina rangul începând de la care distanța dintre termenul general al şirului sumelor parțiale s_n şi suma seriei este mai mică decât $\varepsilon = 0,005$.

2. Fie seria $\sum_{n\geq 1}\ln\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$; scrieți un program pentru a determina rangul termenului general al şirului sumelor parțiale s_n ce aproximează suma seriei cu două zecimale exacte.

3. Studiați natura seriilor următoare folosind criteriile de convergență cunoscute şi în caz de convergență aproximați suma seriei cu s_{1000}

   - $1+\sum_{n\geq 1}\ln\frac{n^4+4}{n^4}$;
   - $\sum_{n\geq 1}\frac{3}{n+(0,7)^n}$;

o $\sum_{n\geq 0}\frac{n-1}{n^3+7}$

o $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$;

o $2+\sum_{n\geq 1}\frac{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}}{5^n}$

4. Studiați natura seriilor:

o $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{(n+1)!}$;

o $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{3^{\frac{n}{2}}}$;

o $\sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2}{(2\cdot n)!}$

şi în caz de convergență aproximați suma seriei cu două zecimale.

5. Studiați natura seriilor

o $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\ln n}$;

o $\sum_{n\geq 4}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$

în caz de convergență aproximați suma seriei cu două zecimale exacte.

6. Desenați, în acelaşi sistem de axe, termenul al 5-lea f_5 al seriei $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2}\right)^n\cdot\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^n$ şi respectiv termenul al 5-lea al şirului sumelor parțiale s_5 , având ca domeniu de definiție un interval judicios ales .

7. Desenați, în acelaşi sistem de axe, al 10-lea termen al seriei de puteri $\sum_{n\geq 0}n\cdot x^n$ şi respectiv al 10-lea termen al şirului sumelor parțiale, al aceleaşi serii, alegând judicios domeniul de definiție, submulțime a mulțimii de convergență. Desenați folosind Symbolic Math $s_{100}(x)$.