Funcții continue_laborator

În Matlab există două noțiuni distincte legate de funcții:

- *expresia simbolică*, de exemplu $\frac{1}{x^2+1}$ sau $\log(x)$
- *funcția -algoritmul* (*regula*) care produce un *output* numeric pentru un *input* numeric sau o mulțime de input-uri numerice.

Se poate calcula limita unei expresii simbolice într-un punct, dar limita unei funcții (în sensul Matlab) nu .
Pentru a defini o expresie simbolică scriem:

```
»syms x
» f=f(x)
```

Să calculăm în continuare câteva limite unor funcții reale de variabilă reală, intr-un punct $\lim_{x\to x_0} f(x)$ folosind instrucțiunea limit(f,x,x_0)

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

```
»syms x
» f=sin(x)/x
» limit(f,x,0)

» limit(f,x,inf)
```

- $\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}$; $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$

```
»f=sin(1/x); limit(f,x,inf)

» limit(f,x,0)
```

Matlab poate fi folosit în scop didactic: o serie de rezultate, cunoscute din liceu rămân nişte noțiuni abstracte, care nu sunt percepute efectiv. Cu ajutorul unor tehnici simple, numerice, putem vizualiza aceste rezultate care astfel ne vor deveni familiare:

- Pentru a vizualiza rezultatul cunoscut:

  $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,

  vom tabela pentru început funcția pentru valori la stânga şi la dreapta lui zero, suficient de apropiate de zero.

  ```
  »x=[-.1;-.01;-.001;-.0001;.0001;.001;.01;.1]; y=(sin(x))./x ;[x y]
  ```

  Se va observa din tabel, că pe intervalul $(-0.01, 0.01)$ valoarea funcției este aproximativ 1

  Să desenăm şi graficul restricției funcției la intervalul $(-0.1, 0.1)$

  ```
  »x=-.1:.01:.1;y=(sin(x))./x;plot(x,y)
  ```

- Am demonstrat că nu există $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ folosind criteriul lui Heine; să ilustrăm acest rezultat tabelând funcția pentru valori pozitive şi negative, în jurul lui zero, şi apoi desenând graficul funcției:

```
»x=[-.1;-.01;-.001;-.0001;.0001;.001;.01;.1];sin(1./x); [x y]
```

- Să vizualizăm alt rezultat cunoscut: $\lim_{x \to o} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$.

```
»x=[-.1;-.01;-.001;-.0001;.0001;.001;.01;.1];x.*sin(1./x); [x y]
»x=[-.5:.01:.5];y=x.*sin(1./x);plot(x,y)
```

In continuare, să desenăm graficele unor funcții studiate din punct de vedere al continuității uniforme în 3.2

- Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=2x-3\cos x$ este uniform continuă pe **R,** fiind funcție lipschtziană (funcție cu derivata mărginită)

```
»x=-10:.1:10;y=2*x-3*cos(x);plot(x,y,'k')
```

- Funcția $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$ nu este uniform continuă pe $(1,+\infty)$ deoarece $x=1$ este asimptotaverticală a funcției

```
»x=1.1:.01:2;y=2.^(1./(x-1));plot(x,y,'k')
```

- Funcția $f:\mathbf{R}\to[1,3]$, $f(x)=2+\sin 2x$ este uniform continuă pe **R** fiind periodica şi continuă pe **R**

```
»x=-10:.1:10;y=2+sin(2*x);plot(x,y,'k')
```

- Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+4}}$ este uniform continuă pe **R**, fiind continuă pe **R** şi admițând asimptote orizontale: $y=2$ la $+\infty$ şi $y=-2$ la $-\infty$

```
»x=-10:.1:10;y=(2*x-1)./sqrt(x.^2+4);plot(x,y,'k')
```

- Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$ este uniform continuă pe **R,** fiind continuă pe **R** şi admițând asimptote oblice la $+\infty$ şi $-\infty$

```
»x=-10:.1:10;y=sqrt(x.^2-x+1);plot(x,y,'k')
```

Teorema lui Weierstrass afirmă că orice funcție continuă pe $[0,1]$ este limita uniformă a unui şir de polinoame Bernstein, ceea ce înseamnă că putem aproxima funcția cu polinomul Bernstein asociat.

- Să scriem polinomul Bernstein de grad 7, asociat funcției $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\log(1+x^2)$ şi să-i desenăm graficul şi graficul funcției în acelaşi sistem de axe .

```
»x=0:.01:1;y1=log(x.^2+1);y=7*x.*((1-x).^6).*log(1+(1/7).^2)+
21*(x.^2).*((1-x).^5).*log(1+(2/7).^2)+35*(x.^3).*((1-x).^4).*log(1+(3/7).^2)+
35*(x.^4).*((1-x).^3).*log(1+(4/7).^2)+21*(x.^5).*((1-x).^2).*log(1+(5/7).^2)+
7*(x.^6).*(1-x).*log(1+(6/7).^2)+(x.^7).*log(2);plot(x,y1,'k',x,y,'k*')
```

Pentru a desena, utilizând Matlab, urma unei curbe γ din $\mathbf{R}^2$, de ecuații parametrice

$$\gamma:\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}\quad t\in[a,b]\qquad (*)$$

folosim următoarea sintaxă:

```
»t=a:h:b; plot(f(t),g(t))
```

- Urma curbei $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbf{R}^2$, de ecuații parametrice:

$$\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases},\quad t\in[0,2\pi]$$

este $\gamma([0,2\pi])=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1\}$, cunoscută sub numele de *astroidă*. Să desenăm $\gamma([0,2\pi])$:

```
» t=0:pi/50:2*pi;plot((cos(t)).^3,(sin(t)).^3,'k')
» title ('astroida')
```

Să desenăm următoarele mulțimi:

- $M = \{(x, y) \in \mathbf{R^2},\ x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ este imaginea intervalului $[0, \frac{\pi}{2}]$ prin curba γ de ecuații parametrice $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

```
»t=0:pi/50:pi/2;plot(cos(t),sin(t))
```

- $C = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} |\ x^2 + y^2 = 1\ \}$ este imaginea intervalului $[0,2\pi]$ prin curba γ de ecuații parametrice $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$:

```
»t=0:pi/50:2*pi;plot(cos(t),sin(t),'k')
»title('cerc')
```

- $L = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} | (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2\}$ este imaginea reuniunii de intervale $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ prin curba γ de ecuații parametrice:

$$\begin{cases} x = \sqrt{\cos 2t} \cdot \cos t \\ y = \sqrt{\cos 2t} \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$$

```
»t1=pi./4:pi/50:pi./4;t2=3*pi./4:pi/50:5*pi./4;plot((sqrt(cos(2*t1))).*cos(t1),(sqrt(cos(2*t1))).*sin(t1),'k',
(sqrt(cos(2*t2))).*cos(t2),(sqrt(cos(2*t2))).*sin(t2),'k')
Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored.
» title ('lemniscata')
```

- $E = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} | \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1\}$ este imaginea intervalului $[0,2\pi]$ prin curba γ de ecuații parametrice $\begin{cases} x = 5 \cdot \cos t \\ y = 2 \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$

```
»t=0:pi/50:2*pi;plot(5*cos(t),2*sin(t),'k')
»title('elipsa')
```

- Să desenăm cardioida, curbă a cărei ecuație în coordonate polare este $r = 1 - \cos t, t \in [-\pi, \pi]$

  Ecuațiile parametrice sunt $\begin{cases} x = (1 - \cos t) \cdot \cos t \\ y = (1 - \cos t) \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi]$

```
»t=-pi:pi./50:pi;plot((1-cos(t)).*cos(t),(1-cos(t)).*sin(t))
» title('cardioida'),xlabel('axa Ox'),ylabel('axa Oy')
```

Pentru a desena utilizând Matlab, urma unei curbe γ din $\mathbf{R^3}$, de ecuații parametrice $\gamma: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$ folosim următoarea sintaxă:

```
»t=a:h:b; plot3(f(t),g(t),h(t)).
```

- Să desenăm urma curbei, de ecuații parametrice $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \quad t \in [0,10\pi] \\ z = t \end{cases}$

```
»t=0:pi/50:10*pi;plot3(cos(t),sin(t),t)
```

Cu ajutorul principiului contracțiilor -metoda aproximațiilor succesive putem studia convergența unor şiruri definite prin relații de recurență; vom scrie un program, bazat pe rezultatele teoretice studiate, pentru a determina rangul termenului, ce aproximează cu o eroare dată, limita şirului.

- Să scriem un program, pentru a aproxima cu două zecimale exacte, limita şirului definit prin relația de recurență $x_0 = 7, x_{n+1} = \dfrac{4x_n^2 + 1}{5x_n}, n \geq 0$, folosind principiul contracțiilor –metoda aproximațiilor succesive.

Este exemplul studiat în amănunt în 3.5; funcția $f(x) = \dfrac{4x^2 + 1}{5x}$ este o contracție cu $C = \dfrac{4}{5}$ am evaluat:

$d(\bar{x}, x_n) \leq \dfrac{C^n}{1-C} \cdot d(x_0, f(x_0))$

Calculăm $x_1 = \dfrac{197}{35}$; $|x_1 - x_0| = \dfrac{48}{35}$ şi astfel $\dfrac{C^n}{1-C} \cdot |x_0 - x_1| = \dfrac{48}{7} \cdot \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$:

```
»n=2;x=(48/7)*(4/5).^n; while x>.001 n=n+1; x=(48/7)*(4/5).^n;end
» [n]
    ans =
            40
»termen(1)=7;for i=2:45 termen(i)=(4/5)*(termen(I-1))+
1./(5*(termen(i-1)));end
» termen(41)
    ans =
            1.0000
```

Din teorema studiată ştim că în şirul aproximațiilor succesive primul termen este ales arbitrar; să vedem ce modificări apar în problema noastră dacă $x_0 = 3$. Avem $x_1 = \dfrac{37}{15}$; $|x_1 - x_0| = \dfrac{8}{15}$ şi $\dfrac{C^n}{1-C} \cdot |x_0 - x_1| = \dfrac{8}{3} \cdot \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

```
»n=2;x=(8/3)*(4/5).^n; while x>.001 n=n+1; x=(8/3)*(4/5).^n;end
» [n]
    ans =
            36.
```

Aşadar al 37-lea termen aproximează limita cu două zecimale exacte.

- Să scriem un program pentru a aproxima cu două zecimale exacte limita şirului definit prin relația de recurență $x_0 = 4, \quad x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3 + 3x_n + 2}{3x_n^2}, n \geq 0$,

folosind principiul contracțiilor –metoda aproximațiilor succesive

Este nevoie în prealabil de câteva considerente teoretice: Considerăm funcția $f : [10^{-5}, \infty) \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3x + 2}{3x^2}$; calculând $f'(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{3x^3} \leq \dfrac{2}{3}, \forall x \geq 10^{-5}$ obținem confirmarea faptului că f este o contracție şi $C = \dfrac{2}{3}$:

```
»n=2;x=(25/8)*(2/3).^n; while x>.001 n=n+1; x=(25/8)*(2/3).^n;end
» [n]
    ans =
                20
»termen(1)=4;for i=2:21 termen(i)=(2/3)*(termen(i-1))+1./(3*(termen(i-1)))+2/(3*(termen(i-1)).^2);end
» termen(21)
    ans =
              2.0000
```

Probleme propuse:

4. Ilustrați prin tabelare și desenând graficul următoarele rezultate:

   - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;
   - nu există $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ **;**
   - $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\cos\frac{1}{x} = 0$

   Verificați calculând cu Symbolic math.

2. Scrieți ecuațiile parametrice ale următoarelor curbe ale căror ecuații în coordonate polare sunt date; desenați utilizând Matlab urmele acestor drumuri.

   - $r = t,\quad t \in [0, 4\pi]$ (spirala lui Arhimede);
   - $r = \frac{1}{t}$, $t \in [\frac{1}{3}, 10]$ (spirala hiperbolică);
   - $r = 1 - \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ (cardioida);
   - $r = 1 - 2\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$;
   - $r = 3 - \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$

3. Reprezentați grafic următoarele mulțimi:

   - $A_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} |\ (x^2 + y^2)^2 = y\cdot(3x^2 - y^2)$ (rozariu cu trei bucle);
   - $A_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} |\ (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 2x\cdot y$ (rozariu cu patru bucle)

5. Scrieți un program pentru a aproxima cu două zecimale exacte limita șirului definit prin relația de recurență $x_0 = 5,\quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 3}{5x_n}, n \geq 0$, folosind principiul contracțiilor –metoda aproximațiilor succesive.

2. Scrieți un program pentru a aproxima cu trei zecimale exacte limita șirului definit prin relația de recurență $x_0 = 11,\quad x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 7x + 2}{6x_n}, n \geq 0$,

   folosind principiul contracțiilor –metoda aproximațiilor succesive.