Diferențiabilitate-laborator

Pentru calculul diferențial folosim Symbolic math, deoarece o expresie simbolică poate fi derivată, în timp ce o funcție din Matlab nu.

Pentru a deriva funcția reală de variabila reală f , folosim funcția diff şi anume f1=diff(f); pentru a calcula $f'(a)$ vom scrie subs(f1,x,a).

- Să calculăm $f'(3)$ în cazul funcției $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

```
»syms x
» f=1/(x^2+1); f1=diff(f)
» subs(f1,x,3)
```

- Să calculăm $f'(2)$ pentru $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

```
syms x
»f=log(x+sqrt(x^2+1));f1=diff(f,x)
```

Expresia derivatei este complicată, e nevoie de simplificări, cu instrucțiunea simplify obținem:

```
»simplify(f1)
» subs(f1,x,2)
```

- Să calculăm utilizând Matlab $f'(2)$ pentru funcția $f(x)=\arcsin\frac{2x}{x^2+1}$; reamintindu-ne că funcția nu este derivabilă în $x=\pm1$ să verificăm ce răspuns primim dacă vom cere să calculeze de $f'(1)$:

```
»syms x
» f=asin(2*x/(x^2+1)); f1=diff(f,x)
»subs(f1,x,2)
» subs(f1,x,1)
```

- Pentru a determina rădăcinile derivatei funcției $f(x)=arctg\frac{2x}{x^2+16}$ vom calcula derivata şi vom rezolva ecuația $f'(x)=0$, folosind funcția solve.

```
»f=atan((2*x)/(x^2+16)); f1=diff(f,x)
»froots=solve(f1)
```

Pentru a desena o funcție a cărei expresie simbolică o avem putem folosi funcția fin=inline(vectorize(f)), care "*vectorizează*", adică redefineşte funcția pentru a fi în stare să opereze cu vectori; vor fi înlocuite astfel operațiile *****, **^**, **/** cu **.***, **.^**, **./** . În continuare se procedează cum am studiat deja.

- Considerăm $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$ ca fiind expresie simbolică şi să-i desenăm graficul, folosind instrucțiunea plot, deci "vectorizând-o"

```
»f=sqrt(x^2-x+1);
»fin=inline(vectorize(f))
»x=-5:.1:6; plot(x,fin(x),'k')
```

Calculul vectorului tangent, versorului tangent, respectiv vectorului normală la o curbă din $\mathbf{R}^2$ sau $\mathbf{R}^3$ este relativ anevoios în unele cazuri,.

- Să calculăm în cazul elicei de ecuații parametrice $x=\cos t, y=\sin t, z=t$, $t\in[0,2\pi]$, vectorul tangent, versorul tangent, respectiv vectorul normală.

  Declarăm utilizarea calculului simbolic şi scriem ecuațiile parametrice ale curbei

```
» syms t
» elice=[cos(t),sin(t),t]
```

Definim funcția ce calculează lungimea vectorului $(f(t), g(t), h(t))$, funcție ce o numim lungime, neputând folosi numele de normă, care în Matlab se refera la un calcul cu numere (nu cu funcții)

```
» lungime=inline('sqrt(v*transpose(v))')
```

Știind că vectorul tangent este derivata $(f'(t), g'(t), h'(t))$, calculăm:

```
» tgelice=diff(elice)
```

Calculăm norma (lungimea) vectorului găsit

```
»lungime(tgelice)
```

Cerem o simplificare, pentru a avea un rezultat "frumos"; notăm cu n pentru a ne reaminti că este o normă (din punct de vedere matematic)

```
»n= simplify(ans)
```

Acum putem determina versorul tangent:

```
» versortgelice=tgelice/n
```

Derivata versorului tangent este vectorul normală:

```
» normelice=diff(versortgelice)
```

- Să calculăm vectorul tangent, versorul tangent şi vectorul normală, în cazul lemniscatei lui Bernoulli, curbă ale cărei ecuații parametrice sunt:
  $x = \sqrt{\cos 2t} \cdot \cos t,\ y = \sqrt{\cos 2t} \cdot \sin t, t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$

```
» syms t
» lemniscata=[(sqrt(cos(2*t)))*cos(t),(sqrt(cos(2*t)))*sin(t)];
» tglemniscata=diff(lemniscata)
» lungime=inline('sqrt(v*transpose(v))')
»n= simplify( lungime(tglemniscata) )
»versortglemniscata=tglemniscata/n
» normallemniscata=simplify(diff(versortglemniscata))
```

Putem desena lemniscata, în Symbolic math folosind instrucțiunea ezplot, specificând axis normal, dispar eventualele erori de scalare.

```
» ezplot(lemniscata,[0,2*pi]); axis normal
```

- Să calculăm vectorul tangent, versorul tangent şi vectorul normală, în cazul cardioidei, curbă de ecuații parametrice: $x = (1+\cos t) \cdot \cos t,\ y = (1+\cos t) \cdot \sin t, t \in [0, 2\pi]$. În final să desenăm, cardioida, în acest tool-box

Lungimea unei curbe, de ecuații parametrice $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in [a, b]$ se calculează cu formula

$$L_\gamma = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt .$$

Pentru calculul integralei $\int_a^b f(t)dt$ în Matlab, vom scrie int(f,a,b), pentru expresii relativ simple ale lui f. Dacă integrala pare mai complicată folosim double(int(f,a,b)), caz în care integrala se rezolvă numeric.

- Să calculăm lungimea elipsei de ecuații parametrice $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, t \in [0,2\pi]$

```
»f=3*cos(t);g=2*sin(t);f1=diff(f,t);g1=diff(g,t); s=simplify(sqrt((f1)^2+(g1)^2)); double(int(s,0,2*pi))
```

Am cerut şi simplificarea funcției de integrat, pentru a calcula mai repede integrala.

- Să calculăm lungimea cardioidei, curbă de ecuații parametrice:

$f(t) = (1+\cos t)\cdot\cos t,\ g(t) = (1+\cos t)\cdot\sin t, t \in [-\pi,\pi]$

```
»f=(1+cos(t))*cos(t);g=(1+cos(t))*sin(t);f1=diff(f,t);g1=diff(g,t);
»s=simplify(sqrt((f1)^2+(g1)^2));double(int(s,-pi,pi))
```

Putem calcula derivate de ordin superior utilizând Matlab, dar nu reuşim să stabilim formula derivatei de ordin n.

- Pentru a calcula derivatele $f^{(5)}(2), f^{(15)}(2)$, pentru $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, vom scrie un program care calculează derivatele până la ordinul 100, lăsând cititorului să calculeze de exemplu $f^{(99)}(2)$. .
  La derivate de ordin mai mare este preferabil să cerem direct formula derivatei, după ce au fost făcute simplificările.

```
»syms x
»f(1)=sqrt(x^2+1); i=2; while i<100 f(i)=diff(f(i-1),x);i=i+1;end
» simplify(f(5))
» subs(ans,x,2)
» simplify(f(15))
 » subs(ans,x,2)
```

Polinomul lui Taylor pentru o expresie simbolică se obține direct, cu instrucțiunea taylor(f,n,x_0), unde n este gradul polinomului.

- Să scriem polinomul Taylor de grad 8 asociat funcției $f:(-1,+\infty)\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\ln(x+1)$ în punctul $x_0 = 2$, să desenăm în acelaşi sistem de axe funcția şi polinomul asociat.

```
»syms x
» log(x+1);g=taylor(f,8,2)
```

Pentru a desena în Symbolic Math graficele a două funcții în acelaşi sistem de axe cerem:

```
ezplot(f,[a,b]); hold on; ezplot(g,[a,b]);hold off
```

Instrucțiunea hold on se foloseşte pentru ca output-ul de la prima instrucțiune să fie reținut şi afişat doar după ce este scrisă instrucțiunea hold off

```
»ezplot(f,[-1,10]);hold on;ezplot(g,[-1,10]);hold off
```

Să desenăm aceste grafice, folosind funcția plot, ceea ce ne permite să alegem culoarea, respective stilul fiecărui grafic:

```
syms x
» f=log(x+1); g=taylor(f,8,2);
» fin=inline(vectorize(f))
» gin=inline(vectorize(g))
» x=-.99:.1:7;plot(x,fin(x),'k*',x,gin(x),'k')
```

- Să scriem polinomul Taylor de gradul 7, în $x_0 = 0$, pentru funcția $f:(-2,2)\to\mathbf{R}$ definită de $f(x) = \ln\sqrt[3]{\frac{x+2}{2-x}}$
  şi să desenăm acest polinom şi funcția f în acelaşi sistem de coordonate.

```
syms x
» f=(1/3)*log((x+2)/(2-x));g=taylor(f,7,0);
 » fin=inline(vectorize(f))
 »gin=inline(vectorize(g))
» x=-1.95:.01:1.95; plot(x,fin(x),'k*',x,gin(x),'k')
```

Am prezentat dezvoltări în serie Taylor în cazuri oarecum clasice. În continuare vom desena termeni ai şirului sumelor parţiale ale seriilor respective şi funcţia, în acelaşi sistem de axe.

- Să desenăm termenii s_{10}, s_{20} ($s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k$), din dezvoltarea în serie a funcţiei $f(x)=e^{-3x}$ şi funcţia în acelaşi sistem de axe.

```
» syms x
» f=exp(-3*x);
» ft10=taylor(f,11,0)
»ft20=taylor(f,21,0)
» fin=inline(vectorize(f));ft10in=inline(vectorize(ft10)); ft20in=inline(vectorize(ft20));
 »x=-4:.1:4; plot(x,fin(x),'k*',x,ft10in(x),'k',x,ft20in(x))
```

- Să desenăm termenii s_9, s_{26} din dezvoltarea în serie a funcţiei $f(x)=\sin^2 x$ şi funcţia în acelaşi sistem de axe:

```
»syms x
»f=(sin(x))^2;ft9=taylor(f,10,0);ft26=taylor(f,27,0);
»ft9in=inline(vectorize(ft9));fin=inline(vectorize(f));ft26in=inline(vectorize(ft26));
»x=-3:.1:3; plot(x,fin(x),'k*',x,ft9in(x),'k',x,ft26in(x))
```

Vom scrie, folosind Matlab, sumele parţiale ale dezvoltării în serie a unei funcţii, sume care sunt dificil de determinat folosind metodele calculului ştiinţific:

- Să scriem termenul $s_{19}=\sum_{k=0}^{19}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k$ din dezvoltarea in serie Taylor a funcţiei $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$; trebuie menţionat că această dezvoltare se poate face pe $(-1,1)$, cu toate că domeniul de definiţie este **R**,

```
»syms x
» f=asin(2*x/(1+x^2)); ft19=taylor(f,20,0)
```

Pentru a calcula derivatele parţiale ale unei expresii simbolice $f(x,y)$ declarăm înainte de a scrie funcţia syms x y. (dacă expresia simbolică este $f(x,y,z)$, vom scrie syms x y z). Pentru a determina $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ de exemplu vom cere fx=diff(f,x), iar pentru a calcula $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ vom scrie în continuare subs(fx,[x,y],[a,b]).

- Să calculăm derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei $f:\mathbf{R}\setminus\{(0,0)\}\to\mathbf{R}$ $f(x,y)=\frac{x+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ şi apoi să calculăm $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)$:

```
»syms x y
» f=(x+y^2)/sqrt(x^2+y^2);
»fx=diff(f,x)
» simplify(fx)
```

Forma iniţială a lui $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a fost complicată şi a fost nevoie de instrucţiunea simplify; pentru calculul lui $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ne propunem pentru economie să combinăm cele două instrucţiuni:

```
» fy=simplify(diff(f,y))
```

Să calculăm $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)$:

```
» m=subs(fx,[x,y],[2,1])
```

- Să calculăm derivatele parțiale de ordinul I ale funcției $f(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x},\ x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0$

```
»syms x y z
» f=x/y+y/z+z/x;
» fx=diff(f,x)
» fy=diff(f,y)
» fz=diff(f,z)
```

Pentru a determina matricea jacobiană a funcției: $f(x_1,...,x_k)=(f_1(x_1,...,x_k),...,f_m(x_1,...,x_k))$ vom scrie:

```
»syms x1,…,xk
»f=[f1(x1,…,xk),…, fm(x1,…,xk));w=[ x1,…,xk]; J=jacobian(f,w)
```

Dacă dorim să calculăm jacobiana în punctul $(a_1,\ldots,a_k)$, vom scrie:

```
»J1=subs(J, [x1,…,xk], [a1,…,ak])
```

- Să calculăm matricea jacobiană în punctul curent şi apoi în punctul $(1,2,3)$ pentru funcția $f(x,y,z)=(x\cdot y\cdot z,\ x^2+y^2+z^2)$:

```
» syms x y z
» f=[x*y*z,x^2+y^2+2*z^2];w=[x,y,z];J=jacobian(f,w)
»J1=subs(J,[x,y,z],[1,2,3])
```

- Să calculăm jacobianul funcției $f:[0,+\infty)\times\{0,2\pi]\times\{0,\pi]$ definită prin $f(r,\theta,\varphi)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$, în punctul curent:

```
syms r th phi
»F=[r*sin(th)*cos(phi),r*sin(th)*sin(phi),r*cos(th)];w=[r,th,phi];
»J1=simplify(det(jacobian(F,w)))
```

Dacă funcția $f:A\to\mathbf{R}$, $A\subset\mathbf{R}^n$, este diferențiabilă în $a\in\operatorname{int}A$, *vectorul gradient* al lui f în a, $\nabla f(a)$ este de fapt matricea jacobiană a lui f în a şi astfel pentru a calcula gradientul funcției $f(x,y,z)$ vom scrie

```
gradf=jacobian(f,[x,y,z]).
```

Formula de calcul a derivatei după un versor, în cazul unei funcții diferențiabile poate fi scrisă ca fiind $\frac{df}{ds}(a)=\langle s,\nabla f(a)\rangle$, formă ce ne va fi utilă în calculele ce urmează:

- Să calculăm $\frac{df}{ds}(1,2)$ dacă $s=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ şi $f(x,y)=\sqrt{x^2+2y^2+1}$:

```
»syms x y
». f=sqrt(x^2+2*y^2+1); gradf=jacobian(f,[x,y])
» w=subs(gradf,[x,y],[1,2])
» s=[sqrt(3)/2,1/2];  fs=w*s'
```

- Să calculăm $\frac{df}{ds}(1,3,-1)$ dacă $s=\left(\frac{1}{3},\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, pentru funcția $f(x,y,z)=\frac{x+z}{yz^2}+\frac{2y+1}{x^2+y^2+z^2}$:

```
»syms x y z
»f=(x+z)/(y*z^2)+(2*y+1)/(x^2+y^2+z^2);gradf=jacobian(f,[x,y,z]);
»w=subs(gradf,[x,y,z],[1,3,-1]);s=[1/3,sqrt(2)/3,sqrt(6)/3];fs=w*s'
```

În continuare vom calcula câteva derivate de ordin superior:

- $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(2,3)$, dacă $f(x,y)=\dfrac{2}{x+y^2}-\dfrac{y}{x}$

```
»syms x y
» f=2/(x+y^2)-y/x; fx1=diff(f,x);  fx2=diff(fx1,x); fyx2=diff(fx2,y);
» subs(fyx2,[x,y],[2,3])
```

- $\dfrac{\partial^4 f}{\partial z^2 \partial y \partial x}(2,1,-1)$, pentru $f(x,y,z)=\ln(x^2+3y^2+z^2)$

```
»syms x y z
»f=log(x^2+3*y^2+z^2);fx=diff(f,x);fyx=diff(fx,y);fzyx=diff(fyx,z);fzzyx=diff(fzyx,z);
»subs(fzzyx,[x,y,z],[2,1,-1])
```

Pentru a calcula hessiana unei funcții într-un punct, folosim formula $H_f(a)=J_{\nabla_f(a)}$ şi anume:

»syms $x_1,\dots,x_k$
»f=f($x_1,\dots,x_k$); gradf=jacobian(f,[$x_1,\dots,x_k$]);
»hessianf=jacobian(gradf,[$x_1,\dots,x_k$])

- Să calculăm hessiana funcției $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}+y^3$ în punctul (2,1):

```
»syms x y
» f=(x^2)/y+y^3;gradf=jacobian(f,[x,y])
» hessianf=jacobian(gradf,[x,y])
» subs(hessianf,[x,y],[2,1])
```

- Să calculăm hessiana funcției $f(x,y,z)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{z}+\dfrac{5z}{x}+xyz$ în punctul (2,2,1):

```
»syms x  y z
»f=x/y+2*y/z+5*z/x+x*y*z;gradf=jacobian(f,[x,y,z]);
»hessianf=jacobian(gradf,[x,y,z]);subs(hessianf,[x,y,z],[2,-2,1])
```

Determinarea extremelor unor funcții de două, respectiv trei variabile reale este una dintre problemele importante ce le putem rezolva utilizând Symbolic Math

- Să calculăm extremele funcției $f(x,y)=x^4+y^4+xy-x^2-y^2$:

```
»syms x y
»f=x^4+y^4+x*y-x^2-y^2
```

Pentru început găsim punctele critice:

```
»fx=diff(f,x);fy=diff(f,y); [xcr,ycr]=solve(fx,fy); [xcr,ycr]
ans =
        [            0,            0]
        [ -1/2*3^(1/2),  1/2*3^(1/2)]
        [  1/2*3^(1/2), -1/2*3^(1/2)]
        [          1/2,          1/2]
        [          1/2,          1/2]
        [          1/2,          1/2]
        [         -1/2,         -1/2]
        [         -1/2,         -1/2]
        [         -1/2,         -1/2]
```

Altă variantă constă în rezolvarea ecuației $\nabla f = (0,0)$, notând gradf(i), componentele gradientului, care apar în funcția solve

```
» gradf=jacobian(f,[x,y])
» [xcr,ycr]=solve(gradf(1),gradf(2));[xcr,ycr]
```

Este preferabilă utilizarea condiției necesare şi suficiente cu valori proprii:

Calculăm hessiana, care este jacobiana gradientului:

```
» gradf=jacobian(f,[x,y]) ; hessmatf=jacobian(gradf,[x,y])
```

Determinăm matricea hessiană, în punctele critice găsite şi îi calculăm valorile proprii. Pentru a calcula valorile proprii ale unei matrice A, folosim funcția eig(A). :

```
» H1=subs(hessmatf,[x,y],[xcr(1),ycr(1)]); eig(H1)
ans =
            [ -3]
            [ -1]
```

$(0,0)$ este punct de maxim local

```
»H2=subs(hessmatf,[x,y],[xcr(2),ycr(2)]); eig(H2)
 ans =
            [ 6]
            [ 8]
```

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este punct de minim local,

```
» H3=subs(hessmatf,[x,y],[xcr(3),ycr(3)]); eig(H3)
 ans =
            [ 6]
            [ 8]
```

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este punct de minim local,

```
» H4=subs(hessmatf,[x,y],[xcr(4),ycr(4)]); eig(H4)
 ans =
            [ 0]
            [ 2]
```

$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ nu este punct de extrem

```
» H7=subs(hessmatf,[x,y],[xcr(7),ycr(7)]) eig(H7)
 ans =
            [ 0]
            [ 2]
```

$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ nu este punct de extrem

Dacă cel puțin una dintre valorile proprii este nulă, punctul critic este *degenerat*.

- Să determinăm extremele funcției $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 + xyz$

```
syms x y z
»  f=x^4+y^4+z^4+x*y*z; gradf=jacobian(f,[x,y,z]);
»hessianf=jacobian(gradf,[x,y,z]);
» [xcr,ycr,zcr]=solve(gradf(1),gradf(2),gradf(3));[xcr,ycr,zcr]
ans =
     [      0,       0,       0]
     [   -1/4,    1/4,     1/4]
     [   -1/4,   -1/4,   -1/4]
     [    1/4,  1/4*i,  1/4*i]
     [    1/4, -1/4*i, -1/4*i]
```

```
[    1/4,   -1/4,    1/4]
[    1/4,    1/4,   -1/4]
[   -1/4, -1/4*i,  1/4*i]
[   -1/4,  1/4*i, -1/4*i]
[ -1/4*i,  1/4*i,   -1/4]
[  1/4*i, -1/4*i,   -1/4]
[  1/4*i,  1/4*i,    1/4]
[ -1/4*i, -1/4*i,    1/4]
[  1/4*i,    1/4,  1/4*i]
[ -1/4*i,    1/4, -1/4*i]
[ -1/4*i,   -1/4,  1/4*i]
[  1/4*i,   -1/4, -1/4*i]
```

Calculăm hessiana în punctele critice (soluțiile reale ale ecuației $\nabla f = (0,0,0)$)

```
» H1=subs(hessianf,[x,y,z],[xcr(1),ycr(1),zcr(1)]); eig(H1)
    ans =
            [ 0]
            [ 0]
            [ 0]
```

(0,0,0) nu este punct de extrem

```
» H2=subs(hessianf,[x,y,z],[xcr(2),ycr(2),zcr(2)]); eig(H2)
    ans =
            [ 1/4]
            [   1]
            [   1]
```

$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ este punct de minim.

```
» H3=subs(hessianf,[x,y,z],[xcr(3),ycr(3),zcr(3)]); eig(H3)
    ans =
            [ 1/4]
            [   1]
            [   1]
```

$\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$ este punct de minim.

```
» H6=subs(hessianf,[x,y,z],[xcr(6),ycr(6),zcr(6)]) eig(H6)
    ans =
            [ 1/4]
            [   1]
            [   1]
```

$\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ este punct de minim.

```
» H7=subs(hessianf,[x,y,z],[xcr(7),ycr(7),zcr(7)]); eig(H7)
    ans =
            [ 1/4]
            [   1]
            [   1]
```

$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$, este punct de minim.

Se poate întâmpla ca rezolvarea sistemului ale cărui soluții sunt punctele critice, să fie imposibilă cu Symbolic Math, caz în care se folosesc metode numerice, care nu fac obiectul acestui curs.

Vom prezenta în continuare, rezolvarea aplicației la teorema de inversiune locală, cu ajutorul pachetului Symbolic math; calculul matematic este destul de anevoios, și nu este exclus de a pierde semnificația exemplului, din cauza dificultăților de calcul întâmpinate:

- Pentru $f=(f_1,f_2)$ unde $f_1(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}$, $f_2(x,y)=x^2y^3$, verificăm dacă jacobianul este diferit de zero, în punctul $(2,2)$; dacă da, putem defini $g=f^{-1}=(g_1,g_2)$ definită pe $B((4\sqrt{2},32),r), r>0$, convenabil ales. ($f(2,2)=(4\sqrt{2},32)$).

```
» syms x y
»f=[sqrt(x^4+y^4),x^2*y^3];
»jacobf=jacobian(f,[x,y])
» det(jacobf)
» subs(det(jacobf),[x,y],[2,2])
ans =
        45.2548
```

Putem calcula derivatele parțiale ale funcției inverse g, fără a explicita funcția deoarece:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1}$$

```
»jacobg=inv( jacobf)
jacobg =
[ 3/2*x/(3*x^4-2*y^4)*(x^4+y^4)^(1/2),        -y/x/(3*x^4-2*y^4)]
[    -y/(3*x^4-2*y^4)*(x^4+y^4)^(1/2),       x^2/y^2/(3*x^4-2*y^4)]
```

Vom rezolva folosind Matlab, exemple ce ilustrează calculul derivatelor (parțiale) de ordinul I ale unor funcții definite implicit:

- Pentru a calcula derivata de ordinul I a funcției $y(x)$ definite implicit prin ecuația $xy^2-\ln y=2$, considerăm funcția $F(x,y)=xy^2-\ln y-2$:

```
»syms x y
» F=x*y^2-log(y)-2;Fy=diff(F,y);Fx=diff(F,x);y1= -Fx/Fy
```

- Să calculăm derivatele parțiale ale lui $z(x,y)$, funcție definită implicit de ecuația $e^{x^2+z^2}-x^2yz=2$:

```
»syms x y z
»F=exp(x^2+z^2)-x^2*y*z-2;Fz=diff(F,z);Fx=diff(F,x);Fy=diff(F,y);
»zx= -Fx/Fz
»zy= -Fy/Fz
```

- Să calculăm derivatele parțiale ale funcțiilor $u(x,y), v(x,y)$ definite implicit de sistemul $\begin{cases} x^2+y^2=u\cdot e^v \\ xy=v\cdot e^u \end{cases}$

```
»syms x y u v
»f1=x^2+y^2-u*exp(v);f2=x*y-v*exp(u);
»f1u=diff(f1,u);f1v=diff(f1,v);f2u=diff(f2,u);f2v=diff(f2,v);
»J1=[f1u f1v;f2u f2v]
J1 =
        [   -exp(v), -u*exp(v)]
        [ -v*exp(u),   -exp(u)]

»f1x=diff(f1,x);f1y=diff(f1,y);f2x=diff(f2,x);f2y=diff(f2,y);
» J2=[f1x f1y;f2x f2y]
J2 =
        [ 2*x, 2*y]
        [   y,     x]
```

Notăm $M = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ şi obţinem:

```
» M=-inv(J1)*J2
M =
[  -2/exp(v)/(-1+u*v)*x+u/exp(u)/(-1+u*v)*y,  -2/exp(v)/(-1+u*v)*y+u/exp(u)/(-1+u*v)*x]
[ 2*v/exp(v)/(-1+u*v)*x-1/exp(u)/(-1+u*v)*y, 2*v/exp(v)/(-1+u*v)*y-1/exp(u)/(-1+u*v)*x]
```

In general calculul extremelor cu legături este destul de laborios, să reluăm exemplele de la curs, utilizând Matlab:

- Să se calculeze extremele funcţiei $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ cu legătura $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

Construim funcţia $F = f + ag$ (am renotat λ, notaţia clasică pentru un multiplicator al lui Lagrange cu a, pentru simplificarea scrierii în Matlab) şi pentru început rezolvăm sistemul $\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial a} = 0$; nu uitaţi să declaraţi pe a ca variabilă a expresiilor simbolice!

```
»syms x y a
» f=1/x+1/y; g=1/x^2+1/y^2-1; F=f+a*g
»  gradF=jacobian(F,[x,y,a])
»[ acr ,xcr,ycr]=solve(gradF(1),gradF(2),gradF(3));[ acr ,xcr,ycr]
ans =
        [ -1/2*2^(1/2),      2^(1/2),      2^(1/2)]
        [  1/2*2^(1/2),     -2^(1/2),     -2^(1/2)]
```

Observaţi şi reţineţi modul de utilizare a funcţiei solve în acest caz: este absolut necesar să fie declarată fiecare componentă a gradientului, în caz contrar apar probleme.

Verificăm dacă punctele critice sunt puncte de extrem pentru F_a

```
»  F1=f+(1/(sqrt(2)))*g
F1 =
        1/x+1/y+1/2*2^(1/2)*(1/x^2+1/y^2-1)
»  gradF1=jacobian(F1,[x,y]);hessmatF1=jacobian(gradF1,[x,y])
»  H1=subs(hessmatF1,[x,y],[-sqrt(2),-sqrt(2)]); eig(H1)
ans =
   0.3536
   0.3536
```

Se observă că punctul $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ este un minim, ce satisface legătura din ipoteză.

```
»   F2=f-(1/(sqrt(2)))*g; gradF2=jacobian(F2,[x,y]);
»   hessmatF2=jacobian(gradF2,[x,y]);
»    H2=subs(hessmatF2,[x,y],[sqrt(2),sqrt(2)]); eig(H2)
  ans =
  -0.3536
  -0.3536
```

şi astfel punctul $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ este un maxim, ce satisface legătura din ipoteză.

- Să calculăm extremele funcţiei $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ cu legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 9$:

```
»syms x y z a
»f=x-2*y+2*z;g=x^2+y^2+z^2-9;F=f+a*g;gradF=jacobian(F,[x,y,z,a])
» [acr,xcr,ycr,zcr]=solve(gradF(1),gradF(2),gradF(3),gradF(4));
» [acr,xcr,ycr,zcr]
ans =
        [  1/2,   -1,    2,   -2]
        [ -1/2,    1,   -2,    2]
```

```
». F1=f+(1/2)*g;hessmatF1=jacobian(jacobian(F1,[x,y,z]))
hessmatF1 =
            [ 1, 0, 0]
            [ 0, 1, 0]
            [ 0, 0, 1]
»  eig(hessmatF1)
     ans =
          1
          1
          1
```

(-1,2,-2) este punct de minim.

```
 » F2=f-(1/2)*g;hessmatF2=jacobian(jacobian(F2,[x,y,z]))
hessmatF2 =
            [ -1,  0,  0]
            [  0, -1,  0]
            [  0,  0, -1]
»  eig(hessmatF2)
     ans =
          -1
          -1
          -1
```

(1,-2,2) este punct de maxim.

- Să calculăm punctele de extrem ale funcției $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-y^2+xy$ situate în discul $x^2+y^2\le 1$:

Într-un exemplu anterior am determinat punctele de extrem ale funcției şi anume: $(0,0)$ este punct de maxim local, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sunt puncte de minim local; se observă că doar $(0,0)$ se află în discul $x^2+y^2<1$ şi că $M_1=f(0,0)=0$

Să calculăm punctele de extrem ale funcției care satisfac legătura $x^2+y^2=1$:

```
»syms x y a
»f=x^4+y^4+x*y-x^2-y^2;g=x^2+y^2-1; F=f+a*g
» gradF=jacobian(F,[x,y,a]);
» [acr,xcr,ycr]=solve(gradF(1),gradF(2),gradF(3));[acr,xcr,ycr]
ans =
            [-1/2,              1/2*2^(1/2),              1/2*2^(1/2)]
            [-1/2,             -1/2*2^(1/2),             -1/2*2^(1/2)]
            [1/2,              -1/2*2^(1/2),              1/2*2^(1/2) ]
            [-1/2,              1/2*2^(1/2),             -1/2*2^(1/2)]
            [ -1                 0.2588                     0.9659  ]
            [ -1               - 0.2588                   - 0.9659  ]
            [ -1                 0.9659                     0.2588  ]
            [ -1                -0.9659                   - 0.2588 ]
```

Valorile xcr,ycr pentru a = -1, au fost prelucrate, softul dând pentru început o expresie foarte complicată şi astfel dificil de utilizat

```
» F1=f-g;hessF1=jacobian(jacobian(F1,[x,y]))
» H1=subs(hessF1,[x,y],[0.2588,0.9659]);eig(H1)
     ans =
        -3.2916
         7.2909
»H2= subs(hessF1,[x,y],[-0.2588,-0.9659]);eig(H2)
     ans =
            -3.2916
            7.2909
»H3= subs(hessF1,[x,y],[-0.9659,-0.2588]);eig(H3)
      ans =
            -3.2916
             7.2909
»H4=ubs(hessF1,[x,y],[0.9659,0.2588]);eig(H4)
      ans =
```

```
     -3.2916
      7.2909
```

Se observă că aceste puncte critice nu sunt puncte de extrem. (regula Sylvester).

```
» F2=f-(1/2)*g;hessF2=jacobian(jacobian(F2,[x,y]));
»H5=subs(hessF2,[x,y],[1/sqrt(2),1/sqrt(2)]);eig(H5)
    ans =
              2
              4
»H6=subs(hessF2,[x,y],[-1/sqrt(2),-1/sqrt(2)]);eig(H6)
     ans =
              4
              6
» F3=f+(1/2)*g;hessF3=jacobian(jacobian(F3,[x,y]))
»H7= subs(hessF3,[x,y],[-1/sqrt(2),1/sqrt(2)]);eig(H7)
     ans =
              4
              6
» subs(hessF3,[x,y],[1/sqrt(2),-1/sqrt(2)])
     ans =
              4
              6
```

Punctele $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$ sunt puncte de minim .

Să calculăm acum valoarea lui f în aceste minime locale, observând înainte că este necesar să calculăm doar în două cazuri: xcr.ycr > 0 şi xcr.ycr < 0:

```
» subs(f,[x,y],[1/sqrt(2),-1/sqrt(2)])
ans =
     -1
» subs(f,[x,y],[1/sqrt(2),1/sqrt(2)])
ans =
     0
```

O analiză imediată stabileşte că:

$$\sup_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)=0=f(0,0)$$

$$\inf_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)=-1=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Am că graficul unei funcţii reale, de două variabile reale este o porţiune de suprafaţă; pentru a vizualiza o asemenea funcţie avem două posibilităţi:

- desenul graficului funcţiei, care este o mulţime de puncte din $\mathbf{R}^3$;
- desenul în $\mathbf{R}^2$ al *curbelor de nivel* ale suprafeţei, de ecuaţii $f(x,y)=c$ unde c este o constantă.

Pentru a fi in spiritul acestui paragraf vom desena expresii simbolice ce definesc funcţiile folosind funcţiile ezsurf şi ezcontour.

- Să desenăm graficul şi curbele de nivel corespunzătoare funcţiei definite de formula

  $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2+x^2\cdot y^2}{(x^2+y^2+1)^2}$, pentru $(x,y)\in[-4,4]\times[-4,4]$.

```
»syms x y
» f=(x^2+y^2+x^2*y^2)/(x^2+y^2+1)^2;ezsurf(f,[-4,4,-4,4])
»ezcontour(f,[-4,4,-4,4])
```

- Să desenăm porțiunea de suprafață definită de expresia $f(x,y)=\dfrac{x^4+2x^3y-6x^2y^2+y^4}{x^4+y^4+1}$ pentru $(x,y)\in[-3,3]\times[-3,3]$; apoi să desenăm curbele de nivel:

```
»f=(x^4+2*x^3*y-6*x^2*y^2+y^4)/(x^4+y^4+1);ezsurf(f,[-3,3,-3,3])
»ezcontour(f,[-3,3,-3,3])
```

Pentru a desena o suprafață de ecuații parametrice

$$x=f(u,v),\, y=g(u,v),\, z=h(u,v),\, (u,v)\in D\subset[0,2\pi]\times[0,2\pi],$$

folosim instrucțiunea ezsurf(x,y,z), care desenează suprafața pe $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$.

- Pentru a desena sfera $x^2+y^2+z^2=1$, scriem ecuațiile parametrice

$$x=\sin u\cos v,\, y=\sin u\sin v,\, z=\cos v,\, v\in[0,2\pi], u\in[0,\pi]$$

```
»x=sin(u)*cos(v);y=sin(u)*sin(v);z=cos(u);
» ezsurf(x,y,z)
```

Probleme propuse

1. Calculați $f'(3)$ pentru funcția $f(x)=\sqrt[3]{x^3-2x^2-x+2}$; calculați $f'(2)$ și justificați rezultatul; determinați zerourile funcției.
2. Calculați lungimea lemniscatei lui Bernoulli .
3. Calculați vectorul tangent, versorul tangent și vectorul normală pentru curbele ale caror ecuații în coordonate carteziene sunt:
   - $\sqrt{x^2+y^2}=arctg\dfrac{y}{x}$.
   - $\sqrt{x^2+y^2}\cdot arctg\dfrac{y}{x}=1$
   - $x^2+y^2-y=\sqrt{x^2+y^2}$.

   În final desenați aceste curbe și calculați-le lungimile
5. Calculați $f^{(24)}(2)$ pentru $f(x)=e^{x^2+3x}$, respective $g^{(43)}(1)$ pentru $g(x)=\sqrt{3x+1}$.
6. Scrieți polinomul Taylor de grad 9 asociat funcției $f:(-0.5,+\infty)\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\sqrt{2x+1}$ în punctul $x_0=4$, desenați în același sistem de axe funcția și polinomul asociat, în culori diferite și stabiliți eroarea comisă prin aproximarea funcției cu acest polinom pe intervalul $(2,6)$.
7. Scrieți polinomul Taylor de grad 15 asociat funcției $f:\mathbf{R}\to\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, definită prin $f(x)=arctg2x$, în punctul $x_0=1$, desenați în același sistem de axe funcția și polinomul asociat folosind instrucțiunile ezplot și plot.
8. Determinați gradul polinomului Taylor în $x_0=2$, ce aproximează cu trei zecimale, pe intervalul $(1,3)$, funcția $f:(-4,4)\to\mathbf{R}$ definită de $f(x)=\ln\sqrt{16-x^2}$; desenați acest polinom și funcția f în același sistem de coordonate.
9. Desenați termenii s_9, s_{26} din dezvoltarea în serie a funcțiilor $f_k, 1\le k\le 4$ și funcția f_k în același sistem de axe: $f_1(x)=e^{\frac{x}{2}}, x\in\mathbf{R}$; $f_2(x)=\dfrac{2x+1}{x^3+3x^2-4x-12}, x\notin\{-3,-2,2\}$; $f_3(x)=\sin^3 x, x\in\mathbf{R}$; $f_4(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x|<1$.

10. Scrieți termenul $s_{29}=\sum_{k=0}^{29}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k$ din dezvoltarea in serie Taylor a funcției $f(x)=arctg\frac{2x}{4+x^2}$.
11. Calculați derivatele parțiale de ordinul I, în punctul curent, ale funcției $f(x,y,z)=\ln(2x^2+y^4+3z^2+1)$
12. Calculați $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ dacă $f(x,y)=\ln(x^2y^2+\sqrt{x^4+y^4+1})$.
13. Calculați jacobianul funcției $f(r,v)=(r\cos v, r\sin v),\ r\geq 0,\ v\in[0,2\pi]$ în punctul curent.
14. Calculați $\frac{df}{ds}(3,2)$, dacă $s=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pentru funcția $f(x,y)=2^{x^2+y^4}$
15. Calculați matricele hessiene, în punctele indicate, pentru următoarele funcții:
    - o $f_1(x,y)=\frac{xy^2}{x+2y}$ în $(2,1)$;
    - o $f_2(x,y,z)=\frac{x}{y+1}+\frac{z^2}{x}$ în $(1,0,2)$.
16. Calculați punctele de extrem ale funcțiilor
    $f_1(x,y)=x\cdot e^{-x^2-y^2}$; $f_2(x,y)=x^3-3x^2+5x\cdot y-7y^2$; $f_3(x)=x^4+y^4+4xy-2x^2-2y^2$;
    $f_4(x)=x^2+xy+y^2+\frac{4}{x}+\frac{4}{y}, x>0, y>0$; $f_5(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$;
    $f_6(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}, x>0, y>0, z>0$; $f_7(x,y,z)=\frac{(x^2-1)+(y^2-4)+x^2-1)\cdot(y^2-4)}{(x^2+y^2+1)^2}$
17. Pentru $f=(f_1,f_2,f_3)$ unde
    $f_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,
    $f_2(x,y,z)=xy+2yz+zx$,
    $f_3(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2+1)$
    verificați dacă jacobianul este diferit de zero, în punctul $(1,2,3)$; dacă da, pe baza teoremei de inversiune locala calculați matricea jacobiană a funcției inverse $g=f^{-1}$.
18. Calculați derivatele de ordinul I a funcției $y(x)$ definite implicit prin ecuațiile
    - o $e^{x^2+y^2}-x^2y^2=5$;
    - o $x\sin y+y\cos x=2$.
19. Calculați derivatele parțiale ale lui $z(x,y)$, funcție definită implicit de ecuațiile:
    - o $\ln(x^2\cdot y^2+z^2+1)-\arcsin\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}=1$;
    - o $\sqrt{x^4+y^2+x^2\cdot y^2\cdot z^2+1}-2^{x\cdot y\cdot z}=5$
20. Calculați derivatele parțiale ale funcțiilor $u(x,y), v(x,y)$ definite implicit de sistemele:
    $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2^{u+v} \\ x\cdot y\cdot z=u^2+v^2 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} \sin x+\cos y=\ln(u^2+v^2) \\ x^2\cdot y^2=u+v \end{cases}$
21. Desenați porțiunea de suprafață $f(x,y)=\frac{x^2y^2-5x^2-3y^2+9}{x^4+y^4+1}$, pentru $(x,y)\in[-4,4]\times[-4,4]$ și curbele sale de nivel.
22. Desenați elipsoidul $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$
23. Desenați hiperboloidul $z=x\cdot y$ pentru $x^2+y^2\leq 1$, folosind o parametrizare convenabil aleasă