Integrala Riemann_ laborator

Integrala Riemann

Pentru calculul unei integrale Riemann $\int_a^b f(x)dx$ lucrăm cu Symbolic Math folosind instrucțiunea int(f,a,b)

Să calculăm următoarele integrale:

- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$:

  » syms x
  » f=1/sqrt(1+x^2);
  » int(f,0,1)

- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2 x}dx$

  »syms x
  »f=1/(1+(cos(x))^2);int(f,0,pi/4)

În cazul unei integrale care necesită un calcul laborios, instrucțiunea int nu face față. Vom scrie în fața instrucțiunii int, instrucțiunea double, şi Matlab ne va returna rezultatul unei integrări numerice:

- $\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$

  » syms x
  » f=log(x+sqrt(1+x^2)); int(f,0,1)
  Warning: Explicit integral could not be found.
  In C:\MATLAB6P5\toolbox\symbolic\@sym\int.m at line 58
  ans =
  int(log(x+(1+x^2)^(1/2)),x = 0 .. 1)

  atunci:
  » double(int(f,0,1))
  Warning: Explicit integral could not be found.
  In C:\MATLAB6P5\toolbox\symbolic\@sym\int.m at line 58
  ans =
  0.4672

Să calculăm o valoare aproximativă a acestei întegrale, înlocuind funcția cu seria Taylor asociată şi aplicând integrarea termen cu termen. Reamintim că nu se lucrează cu seria propriu-zisa, ci cu un termen al şirului sumelor parțiale, ce o aproximează:

» f=log(x+sqrt(1+x^2)); ft=taylor(f,0,47);int(ft,0,1)

- Calculul matematic al integralei $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^x dx$ ridică dificultăți serioase; în Matlab, calculăm polinomul Taylor, de grad suficient de mare, asociat funcției, polinom ce aproximează funcția:

  »f=x^x;ft=taylor(f,1/2,9); simplify int(ft,1/2,1)

- Se demonstrează relativ uşor că şirul $I_n = \int_0^1 x^n \cdot \sin(\pi \cdot x)dx$ este descrescător şi are limita 0, şi anume:

  Folosim monotonia întegralei:

Dacă $x \in (0,1)$ atunci $x^{n+1} < x^n$ şi $\sin(\pi \cdot x) > 0$; vom avea: $x^{n+1} \cdot \sin(\pi \cdot x) < x^n \cdot \sin(\pi \cdot x), \forall x \in (0,1) \Rightarrow I_{n+1} < I_n$

În plus $0 \le x^n \cdot \sin(\pi \cdot x) \le x^n$, $\forall x \in (0,1) \Rightarrow 0 \le I_n \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ şi prin trecere la limită obținem $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Să ilustrăm cu ajutorul softului aceste rezultate, în sensul de a calcula primii 20 de termeni ai şirului. Pentru început calculăm primul termen folosind instrucțiunea int, apoi double(int( )), în scopul de a decide care merită a fi utilizată:

```
syms x
»  f=x*sin(pi*x);int(f,0,1)
     ans =
            1/pi
» double(int(f,0,1))
     ans =
            0.3183
```

Este preferabil să utilizăm instrucțiunea cu output numeric, caz în care ilus trarea va fi elocventă.

```
» for k=1:20 fk=x^k*sin(pi*x);I(k)=double(int(fk,0,1));end
 »k=1:20; I(k)
ans =
Columns 1 through 7
0.3183    0.1893    0.1248    0.0881    0.0654    0.0504    0.0400
Columns 8 through 14
0.0324    0.0268    0.0226    0.0192    0.0166    0.0144    0.0127
Columns 15 through 20
0.0112    0.0100    0.0090    0.0081    0.0073    0.0067
```

- Să calculăm $\xi \in \{0,1\}$ astfel încât $f(\xi) = \int_0^1 e^{-x^2} dx$:

```
syms x
» f=exp(-x^2);a=double(int(f,0,1))
a =
   0.7468
» solve (f-a)
ans =
[  (-log(840849221561335/1125899906842624))^(1/2)]
[ -(-log(840849221561335/1125899906842624))^(1/2)]
```

Ne interesează valoarea din $(0,1)$:

```
» (-log(840849221561335/1125899906842624))^(1/2)
ans =
         0.5403
```

Putem calcula întegrala, folosind dezvoltarea în serie Taylor, în jurul originii, a funcției $f(x) = e^{-x^2}$ şi anume integrând termenul T_{20}

```
syms x
» f=exp(-x^2);  ft=taylor(f,0,20); int(ft,0,1)
```

- O integrală întâlnită în manuale este $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + tgx)dx$ se face substituția $t = \frac{\pi}{4} - x$ şi în urma calculului obținem $I = \frac{\pi}{8} \ln 2$

```
» g=log(1+tan(x));int(g,0,pi/4)
ans =
-1/2*i*log(1+i)*log(2)+1/2*i*log(1+i)*log(-1-i)+1/2*i*log(1-i)*log(2)-1/2*i*log(1-i)*log(-1+i)-
1/2*i*dilog(1/2-1/2*i)+1/2*i*dilog(1/2+1/2*i)-1/4*log(1+i)*pi-1/4*log(1-i)*pi-Catalan
```

Evident, rezultatul nu este cel aşteptat; sa folosim integrarea numerică:

```
»double(int(g,0,pi/4))
     ans =
       0.2722 - 0.0000i
```

Observăm că partea imaginară a răspunsului este zero, asa că răspunsul este cel aşteptat.
Altfel, să dezvoltăm în serie țaylor, funcția de integrat şi să o înlocuim în integrală cu :

```
»gt=taylor(g,0,9); int(gt,0,pi/4)
```

```
ans =
1/4*pi*log(2)-1/32*pi^2+1/384*pi^3-1/1536*pi^4+7/61440*pi^5-1/36864*pi^6+31/5160960*pi^7-
61/41287680*pi^8+2159/5945425920*pi^9
```

Este cazul să cerem calculul aritmetic, al acestei expresii

```
`   »1/4*pi*log(2)-1/32*pi^2+1/384*pi^3-1/1536*pi^4+7/61440*pi^5-1/36864*pi^6+31/5160960*pi^7-
    61/41287680*pi^8+2159/5945425920*pi^9
    ans =
       0.2770
```

Rezultatul este satisfăcător, remarcați cele trei zecimale exacte si poate fi imbunătățit prin cresterea rangului lui s .

Am studiat aspectele legate de funcția $F:[a,b]\to\mathbf{R}$, definită prin $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, unde $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este o funcție continuă pe $[a,b]$. Vom încerca rezolvarea unor asemenea probleme cu Matlab.

- Să calculăm $\frac{d}{dx}\int_0^x e^{t^2}dt$:

```
 »syms x t
»f=exp(t^2);F=int(f,0,x);Fx=diff(F,x)
Fx =
        exp(x^2)
```

In acest caz, singurul dezavantaj este că răspunsul nu apare imediat, o perioadă fiind afişat Busy.

- Să calculăm $\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t\cdot\sqrt{t^2+t+1}}dt$:

```
»g=1/(t*sqrt(t^2+t+1)); G=int(g,1,x);Gx=diff(G,x)
Gx =
-(1/2/(x^2+1+x)^(1/2)-1/4*(2+x)/(x^2+1+x)^(3/2)*(2*x+1))/(1-1/4*(2+x)^2/(x^2+1+x))
```

Obținând o formă complicată a derivatei, este nevoie de simplificarea acestei expresii simbolice:

```
»simplify(Gx)
ans =
        1/x/(x^2+1+x)^(1/2)
```

- Să calculăm $\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t\cdot\sqrt{t^2+t+1}}dt$:

```
» g=1/(t*sqrt(t^4+t^2+1)); G=int(g,1,x);Gx=diff(G,x)

 »simplify(Gx)
ans =
3*x^3*(2*x^2+1+x^4)/((x^2-x+1)*(x^2+1+x))^(1/2)/(((x^2-x+1)*(x^2+1+x))^(1/2)-1)/(1+((x^2-
x+1)*(x^2+1+x))^(1/2))/(2*x^2+1-((x^2-x+1)*(x^2+1+x))^(1/2))/(2*x^2+1+((x^2-x+1)*(x^2+1+x))^(1/2))
```

Remarcați că utilizarea instrucțiunii simplify nu a rezolvat problema în sensul dorit. In această situație se foloseşte instrucțiunea simple, care are ca scop simplificarea expresiei, în sensul ca rezultatul să aibă cel mai mic număr de caractere. Simple aplică independent toate instructiunile de simplificare a expresiei simbolice considerate.

Dacă scriem simple(Gx), vor fiafişate toate înbcercările de simplificare, în schimb dacă vom scrie

```
Gx = simple(Gx),
```

va fi afişat doar rezultatul final:

```
 »  Gx=simple(Gx)
Gx =
1/(x^4+1+x^2)^(1/2)/x
```

- Să calculăm $\frac{d}{dx}\int_0^{\cos x} e^{t^2}\,dt$

  » f=exp(-t^2);F=int(f,0,cos(x));fx=diff(F,x)

- Să calculăm $\frac{d}{dx}\int_1^{\ln x} \frac{1}{t\cdot\sqrt{t^2+1}}\,dt$

  » f=1/(t*sqrt(t^2+1));F=int(f,1,log(x));fx=diff(F,x)
  » fx=simple(fx)

- Să determinăm termenul s_{25} din dezvoltarea în serie de puteri a funcției $f(x)=\arcsin x, |x|\le 1$

».f=asin(x);ft=taylor(f,0,25)

- Să determinăm termenul s_{19} din dezvoltarea în serie de puteri a funcției $F(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt,\ x\in\mathbf{R}$:

» f=1/sqrt(1+t^2);F=int(f,0,x);taylor(F,0,19)

Integrale improprii

- Să calculăm $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

  »syms x
  » f=exp(-x^2);int(f,0,inf)

In cazul integralelor improprii nu putem folosi dezvoltarea în serie a funcției, deoarece transferul de integrabilitate se poate utiliza doar pe intervale compacte $[a,b]$. Să încercăm o înlocuire a funcției $f(x)=e^{-x^2}$ cu polinomul s_{19}, din seria Taylor asociată:

» f=exp(-x^2);ft=taylor(f,0,19)
» int(ft,0,inf)
ans =
-inf

Răspunsul este greşit, deoarece pe baza criteriului de convergența cu inegalități, integrala converge.

- Calculați $\int_0^{\infty} \frac{arctgx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$,

  » g=(atan(x))/(1+(x^2))^(3/2);int(g,0,inf)

- Integrala $\int_a^{\infty} \sin x dx$ este divergentă; să urmărim răspunsul dat de soft:

  »f=sin(x);int(f,0,inf)
  ans =
  undefined

- Pentru a calcula $\int_0^{\infty} e^{-2x}\cdot\sin bxdx$, $b\in\mathbf{R}$, declarăm variabilele care apar în expresia simbolică:

  syms x b
  » f=(exp(-2*x))*sin(b*x);int(f,0,inf)
  ans =
  1/(4+b^2)*b

Calculați

- $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt{1-x^2}}\,dx$

```
» syms x
» f=1/((x+1)*sqrt(1-x^2));int(f,0,1)
```

- $\int_{-2}^{0} \frac{1}{x \cdot \sqrt{4-x^2}} dx$

```
» f=1/(x*sqrt(4-x^2));int(f,-2,0)
ans =
        -inf
```

ceea ce ne confirma divergenţa integralei.

- $\int_{0}^{1} \frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt{\left|1-x^2\right|}} dx$

```
» f=1/((x+1)*sqrt(abs(1-x^2)));int(f,0,inf)
```

- $I = \int_{0}^{\pi/2} \ln(tgx)dx$

```
» f=log(tan(x));int(f,0,pi/2)
ans =
        0
```

Probleme propuse

1. Calculaţi integralele:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{0} x\cdot arctgxdx\ ;\ \int_{1}^{e} \frac{1}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+4)\cdot(x+5)\cdot(x+6)}dx\ ;$$

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2+x+1}}dx\ ;\ \int_{1}^{5} \sqrt{-x^2+6x-5}dx$$

2. Justificaţi afirmaţia: „şirul $I_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^n xdx$ este descrescător şi convergent la zero”. Ilustraţi cu ajutorul Matlab-ului acesastă afirmaţie.

3. Calculaţi derivatele:

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{x} \frac{1}{t^6+1} dt\ ;\ \ \frac{d}{dx}\int_{0}^{\sqrt{x^2+1}} e^{-t^4} dt$$