Integrale multiple –laborator 2009-2010

Integrale duble

Pentru a evalua simbolic integrala int = $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$ vom lucra in două etape: după declararea variabilelor simbolice, şi a funcţiei f

- evaluăm $\int_c^d f(x,y)dy$ =intx şi apoi $\int_a^b$ intx dx =int

```
» syms x y
»f=f (x,y);intx=int(f,y,c,d)
»int=int(intx,a,b)
```

Calculaţi:

- $I = \iint\limits_{[-1,1]\times[0,2]} (x^2 - xy + y^2)dxdy$

```
»syms x y
» f=x^2-x*y+y^2; intx=int(f,y,0,2)
    intx =
            2*x^2-2*x+8/3
»int=int(intx,-1,1)
    int =
            20/3
```

Se poate evalua integrala folosind o singură funcţie şi anume:

```
»syms x y
» f=x^2-x*y+y^2; int=int(int(f,y,0,2),-1,1)
```

- $\iint\limits_{[0,1]\times[2,3]} y \cdot e^{xy} dxdy$,

```
»syms x y
» f=y*exp(x*y);intx=int(f,y,2,3)
    intx =
            -(-3*exp(3*x)*x+exp(3*x)+2*exp(2*x)*x-exp(2*x))/x^2
»int=int(intx,0,1)
    int =
            exp(1)^3-exp(1)^2-1
```

Matlab nu poate calcula simbolic anumite integrale şi anume cazul în care funcţia nu poate fi integrată prin metode elementare, şi atunci le va calcula numeric, dacă în faţa funcţiilor prezentate anterior, scriem double.

- În calculul integralei $\iint\limits_{[0,1]\times[1,2]} e^{x^2-y^2} dxdy$, să folosim pentru început integrarea simbolică:

```
»syms x y
» f=exp(x^2-y^2);int(int(f,y,1,2),0,1)
ans =
-1/4*i*erf(2)*pi*erf(i)+1/4*i*erf(1)*pi*erf(i)
```

Matlab nu poate evalua integrala, răspunsul apare în termeni de erf, care înseamnă primitiva unei anumite funcţii. Să aplicăm ultimul rezultat prezentat:

```
» f=exp(x^2-y^2);double(int(int(f,y,1,2),0,1))
    ans =
            0.1978
```

Pentru a calcula $\iint_A f(x,y)dxdy$, unde $A=\{(x,y)|a\le x\le b, \alpha(x)\le y\le \beta(x)\}$ avem nevoie de reprezentarea grafică a domeniului de integrare, pentru a-l defini cu inegalități.

- $\iint_A (x+y)dxdy$, unde mulțimea A este limitată de parabola $y=x^2-2$ şi de prima bisectoare $y=x$:

  Pentru început calculăm abscisele punctelor de intersecție:

```
» syms x
»  limx=solve(x^2-2-x)
    limx =
           [ -1]
           [  2]
```

  Apoi vom desena în acelaşi sistem de axe cele două curbe, pentru $x\in[-1,2]$:

```
»  x=-1:.1:2;y1=x.^2-2;y2=x;plot(x,y1,x,y2)
```

  Din desen deducem că $x^2-2\le y\le x$, şi suntem în măsura să calculăm simbolic integrala

```
» syms x y
» f=x+y;int(int(f,y,x^2-2,x),-1,2)
    ans =
             9/20
```

În cazul integralei $\iint_A f(x,y)dxdy$, unde mulțimea A este de forma $A=\{(x,y)|c\le y\le d, \alpha_1(y)\le x\le \beta_1(y)\}$, desenul este mai complicat; soluția este inter-schimbarea axelor de coordonate între ele

- Să calculăm $\iint_A (x-y)dxdy$, unde A este limitată de parabola $y^2=x+4$ şi de dreapta $y=x-2$

```
» syms y
» solve(y^2-4-y-2)
    ans =
             [ -2]
             [  3]
» y=-2:.1:3;x1=y.^2-4,x2=y+2;plot(y,x1,y,x2)
```

  Remarcați axele de coordonate!!

  Putem descrie mulțimea A cu ajutorul inegalităților: $-2\le y\le 3$; $y^2-4\le x\le y+2$

```
» syms x y
» f=x-y;inty=int(f,x,y^2-4,y+2)
    inty =
    1/2*(y+2)^2-1/2*(y^2-4)^2-y*(y+6-y^2)
»  int(inty,-2,3)
    ans =
             -125/12
```

- $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, unde A este limitată de cercul $x^2+y^2=2$ şi parabola $y^2=x$ (interiorul în raport cu parabola.)

```
»syms y
»solve(y^4+y^2-2)
    ans =
             [          1]
             [         -1]
             [  i*2^(1/2)]
             [ -i*2^(1/2)]
```

```
»y=-1:.1:1; x1=y.^2;x2=sqrt(2-y.^2);plot(y,x1,y,x2)

»f=sqrt(x^2+y^2);int(int(f,x,y^2,sqrt(2-y^2)),-1,1)
Warning: Explicit integral could not be found.
In C:\MATLAB6P5\toolbox\symbolic\@sym\int.m at line 58
    ans =
            int(1/2*2^(1/2)*(2-y^2)^(1/2)+1/2*y^2*log((2-y^2)^(1/2)+2^(1/2))-1/2*y^2*(y^4+y^2)^(1/2)-
    1/2*y^2*log(y^2+(y^2*(1+y^2))^(1/2)),y = -1 .. 1)
```

Integrala nu poate fi rezolvată simbolic.

```
»f=sqrt(x^2+y^2);double(int(int(f,x,y^2,sqrt(2-y^2)),-1,1))
Warning: Explicit integral could not be found.
»In C:\MATLAB6P5\toolbox\symbolic\@sym\int.m at line 58
    ans =
        1.6956
```

Dacă în problemele anterioare am evitat folosirea proprietății de aditivitate a integralei duble, prin schimbarea ordinii de integrare, în exercițiul următor, nu avem altă soluție:

- $\iint\limits_A (x^2 + y^2)dxdy$, unde A este definită de inegaliatea $|x| + |y| \le 1$

  Înainte de a desena cu Matlab domeniul de integrare, trebuie să observăm că $|x| \le 1 - |y|$, ceea ce înseamnă că $x \in [-1,1]$

```
» x=-1:.1:1;y1=1-abs(x);y2=abs(x)-1;plot(x,y1,x,y2)
```

Să descompunem mulțimea A , în două submulțimi, cu dreapta $x = 0$

```
»x1=-1:.1:1;y1=1-abs(x);y2=abs(x)-1;x3=0;y3=1:.1:1;
plot(x,y1,x,y2,x3,y3,'*')
```

Mulțimea A_1 (cea din stânga axei Oy) este definită de inegalitățile: $-1 \le x \le 0, -1 - x \le y \le 1 + x$, în timp ce mulțimea A_2 este definită de: $0 \le x \le 1, -1 + x \le y \le 1 - x$

```
»syms x y
» int(int(x^2+y^2,y,-1-x,1+x),-1,0)+int(int(x^2+y^2,y,-1+x,1-x),0,1)
    ans =
            2/3
```

Să calculăm integrale duble, folosind schimbarea de variabile. Prezentăm integrale calculabile prin trecere la coordonate polare sau coordonate polare generalizate:

- $\iint\limits_A \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$ unde mulțimea A este limitată de cercul $x^2 + y^2 = 4$.

  Declarăm variabilele simbolice care apar x y r phi, scriem ecuația curbei ce limitează domeniul în coordonate polare şi o rezolvăm stabilind astfel limitele între care variază r.

```
»syms x y r phi
» polardom=simplify(subs(x^2+y^2-4,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
    polardom =
            r^2-4
»limr=solve(polarfun,r)
    limr =
            [  2]
            [ -2]
```

Ştim că r este pozitiv, deci $r \in [0,2]$; asupra lui φ nu se pune nici o condiție, aşadar $\varphi \in [0,2\pi]$.

Scriem funcția de integrat în coordonate polare şi calculăm jacobianul trecerii de la coordonate carteziemne la cele polare

```
» polarfun=simplify(subs(f,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
```

```
polarfun =
        csgn(r)*r
```

r este pozitiv, avem de fapt $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r$ (csgn=signum)

```
» F=[r*cos(phi),r*sin(phi)];jacob=det(jacobian(F,[r,phi]))
    jacob =
    cos(phi)^2*r+r*sin(phi)^2
»j=simple(jacob)
    j =
        r
```

Astfel avem:

```
»int(int(r*r,0,2),0,2*pi)
    ans =
        16/3*pi
```

- $\iint_A (x+y)dxdy$, unde mulțimea A se află în primul cadran și este limitată de cercul $x^2+y^2=1$ și prima bisectoare.

Domeniul este definit de inegalitățile $x^2+y^2 \le 1$ și $y \le x$:

```
syms x y r phi
» polardom1=simplify(subs(x^2+y^2-1,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
    polardom1 =
        r^2-1
» polardom2=simplify(subs(y-x,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
    polardom2 =
        r*sin(phi)-r*cos(phi)
```

Calculăm limitele între care variază r și nu uităm că r este pozitiv, apoi calculăm limitele între care variază φ știind că $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

```
»limr=solve(polardom1,r)
    limr =
        [  1]
        [ -1]

»limphi=solve(polardom2,phi)
    limphi =
        1/4*pi
```

Așadar $r \in (0,1)$, în timp ce $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$

Calculăm $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ și când integrăm nu uităm să înmulțim cu jacobianul transformării.

```
» polarfun=simplify(subs(x+y,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
    polarfun =
    r*cos(phi)+r*sin(phi)
» int(int(polarfun*r,0,1),0,pi/4)
    ans =
        1/3
```

- $\iint_A e^{-x^2-y^2} dxdy$, dacă A este limitată de cercul $(x-1)^2+y^2=1$

```
»syms x y r phi
```

```
» polarfun=simplify(subs((x-1)^2+y^2-1,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
     polarfun =
                  -2*r*cos(phi)+r^2
» rlim=solve(polarfun,r)
     rlim =
                  [          0]
                  [ 2*cos(phi)]
```

Am obținut că $0 \le r \le 2\cos\varphi$; această inegalitate implică $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

```
»int(int(r*exp(-r^2),0,2*cos(phi)),-pi/2,pi/2)
Warning: Explicit integral could not be found.
In C:\MATLAB6P5\toolbox\symbolic\@sym\int.m at line 58
     ans =
     int(-1/2*exp(-4*cos(phi)^2)+1/2,phi = -1/2*pi .. 1/2*pi)
```

Integrarea simbolică nu rezolvă problema, este nevoie de integrare numerică:

```
» double(int(int(r*exp(-r^2),0,2*cos(phi)),-pi/2,pi/2))
Warning: Explicit integral could not be found.
In C:\MATLAB6P5\toolbox\symbolic\@sym\int.m at line 58
     ans =
                  1.0862
```

În cazul în care domeniul de integrare este limitat de o elipsă, sau o porțiune de elipsă, se folosesc coordonate polare generalizate:

- $\iint_A \sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}dxdy$ unde A este limitată de elipsa $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

  Formula de calcul a ariei este cunoscută $aria(A)=\iint_A dxdy$

```
»syms x y r phi
»f=sqrt(1-x^2/9-y^2/4);
»polarfun=simplify(subs(f,[x,y],[3*r*cos(phi),2*r*sin(phi)]))
     polarfun =
                  (1-r^2)^(1/2)
»polardom=simplify(subs(x^2/9+y^2/4-1,[x,y],[3*r*cos(phi),
2*r*sin(phi)]))
     polardom =
                  -1+r^2
» limr=solve(polardom,r)
     limr =
                  [  1]
                  [ -1]
» F=[3*r*cos(phi),2*r*sin(phi)];jacF=det(jacobian(F,[r,phi]))
     jacF =
                  6*cos(phi)^2*r+6*r*sin(phi)^2
» JF=simple(jacF)
     JF =
                  6*r
»int(int(polarfun*JF,r,0,1),0,2*pi)
     ans =
                  4*pi
```

- Să calculăm aria limitată de lemniscata lui Bernoulli, curbă a cărei ecuație în coordonate carteziene este $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)$

  Desenând curba observăm că din simetria figurii, ne permitem să calculăm doar aria limitată de bucla din dreapta, rezultatul final fiind această arie înmulțită cu 2;

```
»syms x y r phi
```

```
»polardom=simplify(subs((x^2+y^2)^2-x^2+y^2,[x,y],[r*cos(phi),
r*sin(phi)]))
      polardom =
      r^4-2*r^2*cos(phi)^2+r^2
»limr=solve(polardom,r)
      limr =
                  [                    0]
                  [                    0]
                  [  (-1+2*cos(phi)^2)^(1/2)]
                  [ -(-1+2*cos(phi)^2)^(1/2)]
```

Rezultă că $r \in [0, \sqrt{2\cos^2 \varphi - 1}]$

```
limphi=solve(2*cos(phi)^2-1)
      limphi =
                  [ 1/4*pi]
                  [ 3/4*pi]
```

Urmărind desenul, deducem din simetria buclei din dreapta că $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

```
»aria =2*int(int(r,r,0,sqrt(2*cos(phi)^2-1)),-pi/4,pi/4)
      aria =
                  1
```

Ne reamintim că $\iint_A f(x,y)dxdy$, unde $f(x,y) \geq 0, \forall (x,y) \in A$ reprezintă volumul corpului limitat de mulțimea A din planul xOy şi porțiunea de suprafață $z = f(x,y), (x,y) \in A$.

- Să calculăm volumul corpului limitat de discul $x^2 + y^2 \leq 2y$ din planul xOy şi paraboloidul $z = x^2 + y^2 + 3$.

  Avem de evaluat $\iint_{x^2+y^2 \leq 2y} (x^2 + y^2 + 3)dxdy$

```
 »syms x y r phi
.   »polarfun=simplify(subs(x^2+y^2+3,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
      polarfun =
                  r^2+3
» polardom=simplify(subs(x^2+y^2-2*y,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
      polardom =
                  r^2-2*r*sin(phi)
» limr=solve(polardom,r)
      limsr =
                  [        0]
                  [ 2*sin(phi)]
```

Limitele de integrare pentru r sunt 0 şi $2\sin\varphi$, rezultând astfel că $\sin\varphi \geq 0$, deci $\varphi \in [0, \pi]$

```
» int(int(r*polarfun,r,0, 2*sin(phi)),0,pi)
      ans =
                  9/2*pi
```

Aria unei porțiuni de suprafață se calculează utilizând integrala dublă. $\iint_D \left\| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\| dudv$

- Pentru a calcula aria elipsoidului $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$, ținem seama de simetria suprafeței şi vom calcula doar aria situată in primul octant; rezultatul înmulțit cu 8 este cel căutat.

  Ecuațiile parametrice ale porțiunii de elipsoid situat în primul octant sunt:

$x = 5\sin u \cos v,\ y = 4\sin u \sin v,\ z = 3\cos u,\ (u,v) \in [0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]$.

Aria acestei porțiuni de suprafață este $\iint\limits_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \left\| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\| dudv$

Ştim că $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \frac{d(y,z)}{d(u,v)} \cdot \vec{i} + \frac{d(z,x)}{d(u,v)} \cdot \vec{j} + \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \cdot \vec{k}$ şi astfel vom calcula aceşti determinanți funcționali:

```
» syms u v
» f=5*sin(u)*cos(v);g=4*sin(u)*sin (v);h=3*cos(u);
» det1=det(jacobian([g,h],[u,v]))
   det1 =
          12*sin(u)^2*cos(v)
» det2=det(jacobian([h,f],[u,v]))
   det2 =
          15*sin(u)^2*sin(v)
» det3=det(jacobian([f,g],[u,v]))
   det3 =
   20*cos(u)*cos(v)^2*sin(u)+20*sin(u)*sin(v)^2*cos(u)
```

Definim norma:

```
»elemarie=(det1^2+det2^2+det3^2)^(1/2)
   elemarie =
   (144*sin(u)^4*cos(v)^2+225*sin(u)^4*sin(v)^2+(20*cos(u)*cos(v)^2*sin(u)+20*sin(u)*sin(v)^2*cos(u))
   ^2)^(1/2)
» elar=simple(elemarie)
   elar =
   ((81*cos(u)^2*cos(v)^2+175*cos(u)^2-81*cos(v)^2+225)*sin(u)^2)^(1/2)
```

Dacă nu putem calcula simbolic integrala, calculăm numeric, cu double:

```
» arie=double(int(int(elar,0,pi/2),0,pi/2))
   Warning: Explicit integral could not be found.
   > In C:\MATLAB6P5\toolbox\symbolic\@sym\int.m at line 58
   arie =
          24.9319
```

Am putea simplifica programul, renunțând a calcula fiecare jacobian în parte, calculând direct elementul de arie:

```
»elemarie=sqrt(det(jacobian([g,h],[u,v]))^2+det(jacobian([h,f],[u,v]))^2+det(jacobian([f,g],[u,v]))^2)
elemarie =(144*sin(u)^4*cos(v)^2+225*sin(u)^4*sin(v)^2+(20*cos(u)*cos(v)^2*sin(u)+
20*sin(u)*sin(v)^2*cos(u))^2)^(1/2)
» elar=simple(elemarie)
elar =
((81*cos(u)^2*cos(v)^2+175*cos(u)^2-81*cos(v)^2+225)*sin(u)^2)^(1/2).
```

Aria totală va fi $24.9319 \cdot 8$

- Să calculăm aria suprafeței paraboloidului $z = x^2 + y^2$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 4$.

Pentru a desena cilindrul folosim funția cylinder din Matlab, funcție care generează un cilindru de rază R cu cercul bazei aproximat de N puncte echidistante şi care se apelează cu sintaxa:

```
»{x,y,z]=cylinder(R,N); mesh(x,y,z);
```

Aşadar:

```
» [x,y,z]=cylinder(2,100);mesh(x,y,z);hold on
» [x,y]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);z=x.^2+y.^2;surf(x,y,z);hold off
```

Să calculăm efectiv aria, ştiind că în acest caz se foloseşte formula: $aria(\Sigma) = \iint_A \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$

```
» syms x y r phi
»  f=x^2+y^2;
»  fx=diff(f,x);fy=diff(f,y); elemarie=sqrt(1+fx^2+fy^2)
     elemarie =
              (1+4*x^2+4*y^2)^(1/2)
»  polarelar=simplify(subs(elemarie,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
     polarelar =
              (1+4*r^2)^(1/2)
»  polardom=simplify(subs(x^2+y^2-4,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
     polardom =
              r^2-4
»  limr=solve(polardom)
     limr =
              [  2]
              [ -2]
» int(int(r*polarelar,r,0,2),0,2*pi)
     ans =
              17/6*17^(1/2)*pi-1/6*pi
```

Exerciţii propuse

1. $\iint_A (xy+1)dxdy$, *unde mulţimea* A *este limitată de parabola* $y = x^2 - 3$ *şi dreapta* $y = 3x+1$.

2. $\iint_A (x^2 - y)dxdy$, , *unde* A *este limitată de parabolele* $y^2 = x+3$ şi $y^2 = -x+5$

3. *Calculaţi aria mulţimii mărginita de dreptele:* $y = x,\ y = 2x$ şi. $y = 4 - x$

4. $\iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dxdy$, *unde mulţimea* A *este situaţa deasupra axei* Ox şi este *limitată de semicercul* $x^2 + y^2 = 4\ (y \geq 0)$.

5. $\iint_A (xy+2)dxdy$, *unde mulţimea* A *se află în primul cadran şi este limitată de cercul* $x^2 + y^2 = 1$ *şi de dreptele* $y = x\sqrt{3}$ şi $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.

6. *Calculaţi aria limitată de elipsa* $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

7. *Calculaţi volumul corpului limitat de discul* $x^2 + y^2 \leq 4x$ *din planul* xOy *şi porţiunea de suprafaţă* $z = xy - y + 2$.

8. *Calculaţi volumul corpului limitat de discul* $x^2 + y^2 \leq 4x - 2y$ *din planul* xOy *şi porţiunea de suprafaţă* $f(x,y) = (x-3)^2 - (y-2)^2$.

9. *Calculaţi aria suprafeţei* $z = xy$ *situată în interiorul cilindrului* $x^2 + y^2 = 1$

Integrale triple

Calculul integralelor triple pe mulţimea $[a,b]\times[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ se efectuează imediat, prin iterare, cum se vede în exemplul următor:

- $$\iiint\limits_{[-1,1]\times[0,3]\times[1,2]} (xyz+x^2+yz)dxdydz$$

```
» syms x y z
»  int(int(int(x*y*z+x^2+y*z,x,-1,1),y,0,3),1,2)
    ans =
            31/2
```

Calculăm în continuare $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, în cazul în care avem:

$V=\{(x,y,z)\big|(x,y)\in D, \alpha(x,y)\le z\le \beta(x,y)\}$,

unde $\alpha,\beta : D\to \mathbf{R}$, sunt funcţii continue.

- $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, unde mulţimea V este limitată de paraboloidul $z=x^2+y^2$ şi de sfera $x^2+y^2+z^2=9$, interiorul în raport cu paraboloidul.

Vom începe prin a desena cele două suprafeţe ce limitează mulţimea V ; am folosit instrucţiunea ezsurf pentru desenul porţiunilor de suprafaţă, care sunt grafice ale unor funcţii (expresii simbolice), acelaşi rezultat îl vom obţine folosind ezmesh:

```
» syms x y z
»ezmesh(sqrt(6-x^2-y^2),[-2,2,-2,2]);hold on;
ezmesh(x^2+y^2,[-2,2,-2,2]); hold off
```

Observăm că z variază între suprafaţa paraboloidului şi emisfera superioară a sferei, adică :
$x^2+y^2\le z\le\sqrt{6-x^2-y^2}$,

ceea ce înseamnă că prima integrala ce o avem de calculat este $\int\limits_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}}(x+y+z)dz$:

```
» fun= int(x+y+z,z,x^2+y^2,sqrt(9-x^2-y^2))
    fun =
    x*((9-x^2-y^2)^(1/2)-x^2-y^2)+y*((9-x^2-y^2)^(1/2)-x^2-y^2)+9/2-1/2*x^2-1/2*y^2-1/2*(x^2+y^2)^2
```

Să determinăm planul în care se intersectează cele doua suprafeţe:

```
»solve(z^2+z-6)
    ans =
            [ -3]
            [  2]
```

Mulţimea este situată deasupra planului xOy , deci intersecţia are loc în $z=2$, după cercul $x^2+y^2=2$.
Proiecţia mulţimii V în planul xOy va fi discul $x^2+y^2\le 2$ şi pentru a calcula integrala dublă pe acest disc, trecem la coordonate polare:

```
»syms x y r phi
»polarfun=simplify(subs(fun,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
    polarfun =
    r*cos(phi)*(9-r^2)^(1/2)-r^3*cos(phi)+r*sin(phi)*(9-r^2)^(1/2)-r^3*sin(phi)+9/2-1/2*r^2-1/2*r^4
 »polardom=simplify(subs((x^2+y^2-2),[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
```

```
    polardom =
    r^2-2
» limr=solve(polardom)
    limr =
        [  2^1/2]
        [ -2^1/2]
```

Astfel $r \in [0, \sqrt{2}]$ şi $\varphi \in [0, 2\pi]$, asupra unghiului nefiind impusă nicio restricție:

```
» int(int(polarfun*r,phi,0,2*pi),0,2)
    ans =
        20/3*pi
```

- $\iiint_V z^2 dxdydz$ unde V este limitat de conul $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ şi emisfera superioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

Pentru a ne simplifica lucrul în Matlab, observăm că sfera are ecuația $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$

```
» syms x y z
» ezmesh(sqrt(x^2+y^2),[-1.9,1.9,-1.9,1.9]);hold on
» ezmesh(2+sqrt(4-x^2-y^2),[-1.9,1.9,-1.9,1.9]);hold off
```

Se vede din figură că $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ şi astfel:

```
» fun=int(z^2,z,sqrt(x^2+y^2),2+sqrt(4-x^2-y^2))
    fun =
        1/3*(2+(4-x^2-y^2)^(1/2))^3-1/3*(x^2+y^2)^(3/2)
```

Determinăm planul în care se intersectează suprafețele

```
»  solve(2*z^2-4*z)
    ans =
        [ 0]
        [ 2]
```

Proiecția mulțimii V în planul xOy va fi discul $x^2 + y^2 \le 4$

```
»  syms x y r phi
»  polarfun=simplify(subs(fun,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
    polarfun =
    32/3+16/3*(4-r^2)^(1/2)-2*r^2-1/3*(4-r^2)^(1/2)*r^2-1/3*csgn(r)*r^3
»polardom=simplify(subs(x^2+y^2-4,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
    polardom =
        r^2-4
» limr=solve(polardom)
    limr =
        [  2]
        [ -2]
» int(int(polarfun*r,r,0,2),0,2*pi)
    ans =
        48*pi
```

- $\iiint_V (x^2 + yz) dxdydz$ unde V este situat deasupra paraboloidului $z = x^2 + y^2$ şi sub planul $x + y + z = \frac{17}{2}$.

Pentru început desenăm cele două suprafețe, în scopul de a stabili limitele între care variază z :

```
»  syms x y z
»  ezmesh(x^2+y^2,[-5,5,-5,5]);hold on;
ezmesh(17/2-x-y,[-5,5,-5,5]);hold off
```

Aşadar $x^2 + y^2 \le z \le \frac{17}{2} - x - y$.

```
» fun=int(x^2+y*z,z,x^2+y^2,17/2-x-y)
      fun =
      x^2*(17/2-x-y-x^2-y^2)+1/2*y*((17/2-x-y)^2-(x^2+y^2)^2)
```

Eliminând z din cele două ecuații ce definesc suprafețele $z = x^2 + y^2$ şi $x + y + z = \frac{17}{2}$, obținem proiecția acestei mulțimi în planul $xOy : x^2 + y^2 + x + y \le \frac{17}{2}$

Inegalitatea defineşte un disc şi merită să punem în evidență coordonatele centrului, pentru a face o transformare de coordonate convenabilă.

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \le 9$$

şi astfel vom nota $x + \frac{1}{2} = r \cdot \cos\varphi,\ y + \frac{1}{2} = r \cdot \sin\varphi.$

```
»  syms x y r phi
» polarfun=simplify(subs(fun,[x,y],[r*cos(phi)-1/2,r*sin(phi)-1/2]))
      polarfun =
      -81/4-9*r^2*cos(phi)*sin(phi)9/2*r*cos(phi)+99/2*r*sin(phi)+r^4*cos(phi)*sin(phi)+
      18*r^2*cos(phi)^2+5/4*r^4-9*r^2+1/2*r^3*cos(phi)-2*r^4*cos(phi)^2-r^3*sin(phi)-1/2*r^5*sin(phi)
»polardom=simplify(subs(x^2+y^2+x+y-17/2,[x,y],[r*cos(phi)-1/2,r*sin(phi)-1/2]))
      polardom =
              -9+r^2
»  solve(polardom)
      ans =
              [  3]
              [ -3]
```

Avem: $r \in [0,3]$, $\varphi \in [0,2\pi]$; calculăm jacobianul transformării:

```
»  F=[r*cos(phi)-1/2,r*sin(phi)-1/2];jac=det(jacobian(F,[r,phi]))
      jac =
              cos(phi)^2*r+r*sin(phi)^2
»  JF=simple(jac)
      JF =
              r
»  int(int(polarfun*JF,phi,0,2*pi),0,3)
      ans =
              -243/2*pi
```

Dacă am folosi transformarea $x = r \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi.$, apar serioase complicații la determinarea limitelor domeniului de integrare, cum se vede din secvența următoare:

```
» polardom=simplify(subs(x^2+y^2+x+y-17/2,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
      polardom =
              r^2+r*cos(phi)+r*sin(phi)-17/2
» limr=solve(polardom,r)
      limr =
      [ -1/2*cos(phi)-1/2*sin(phi)+1/2*(cos(phi)^2+2*cos(phi)*sin(phi)+sin(phi)^2+34)^(1/2)]
      [ -1/2*cos(phi)-1/2*sin(phi)-1/2*(cos(phi)^2+2*cos(phi)*sin(phi)+sin(phi)^2+34)^(1/2)]
```

Nici folosirea instrucțiunii simple nu ajută la rezolvarea problemei.

```
» limr=simple(limr)
```

```
limr =
[ -1/2*cos(phi)-1/2*sin(phi)+1/2*(35+sin(2*phi))^(1/2)]
[ -1/2*cos(phi)-1/2*sin(phi)-1/2*(35+sin(2*phi))^(1/2)]
```

- $\iiint_V (xy+z)dxdydz$, unde mulțimea V se afla deasupra planului xOy şi este limitată de cilindrul $x^2+y^2=\frac{9}{4}$ şi emisfera superioară a sferei $x^2+y^2+z^2=9$.

Problema mai delicată este reprezentarea grafică a celor două suprafețe.
Funcția sphere generează coordonatele (x,y,z) ale sferei unitate, precizându-se numărul de puncte folosite:

```
»{x,y,z]= sphere (N); mesh(x,y,z);
```

Am încercat această variantă: ştiind că raza sferei este 1, am ales raza cilindrului, astfel încât să păstrăm proporția din enunț: $\frac{1.5}{3}=\frac{R}{1}$.
Dezavantajul constă în faptul că nu am reuşit să desenăm doar corpul care se află deasupra planului xOy :

```
» [x,y,z]=cylinder(.5,100);mesh(x,y,z);hold on
» [x,y,z]=sphere(100);mesh(x,y,z);hold off
```

Varianta care pare mai bună este combinația dintre a folosi funcția cylinder, şi a desena în acelaşi sistem de axe emisfera superioară, care este graficul funcției: $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

```
»[x,y,z]=cylinder(1.5,100);mesh(x,y,z);hold on
»[x,y]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);z=sqrt(9-x.^2-y.^2);surf(x,y,z);hold off
```

şi astfel deducem că $0\le z\le\sqrt{9-x^2-y^2}$ în timp ce proiecția pe planul xOy este discul $x^2+y^2\le\frac{9}{4}$:

```
»syms x y z
» fun=int(x*y+z^2,z,0,sqrt(9-x^2-y^2))
     fun =
             x*y*(9-x^2-y^2)^(1/2)+1/3*(9-x^2-y^2)^(3/2)
» syms x y r phi
» polarfun=simplify(subs(fun,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
     polarfun =
             r^2*cos(phi)*sin(phi)*(9-r^2)^(1/2)+3*(9-r^2)^(1/2)-1/3*(9-r^2)^(1/2)*r^2
» polardom=simplify(subs(x^2+y^2-9/4,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
     polardom =
             r^2-9/4
» limr=solve(polardom)
     limr =
             [  3/2]
             [ -3/2]
»int=int(int(r*polarfun,phi,0,2*pi),0,3/2)
     int =
             -729/80*pi*3^(1/2)+162/5*pi
» -729/80*pi*3^(1/2)+162/5*pi
     ans =
             52.2029
```

O alta observație importantă: dacă în funcția int nu specificăm variabila φ, softul integrează în funcție de r şi avem un rezultat surprinzător, în care apar numere complexe:

```
»int=int(int(r*polarfun,0,2*pi),0,3/2)
     int =
     2/5*i*pi^2*(-9+4*pi^2)^(3/2)*sin(3/2)^2+3/5*i*(-9+4*pi^2)^(3/2)*sin(3/2)^2-2/5*i*pi^2*(9+4*pi^2)^(3/2)+
     9/10*i*(-9+4*pi^2)^(3/2)+81/5*sin(3/2)^2+243/10
```

- Calculați volumul limitat de $x^2+y^2+z^2=4z$ și $x^2+y^2+z^2=4$

```
»ezmesh(sqrt(4-x^2-y^2),[-1.9,1.9,-1.9,1.9]);hold on;
»ezmesh(2-sqrt(4-x^2-y^2),[-1.9,1.9,-1.9,1.9]);hold off
```

Observăm că $2-\sqrt{4-x^2+y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2+y^2}$ și astfel avem de calculat:

$$vol(V)=\iiint_{v} dxdydz = \iint_{pr_{xOy}V} \left(\int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \right) dxdy$$

Cele două sfere se intersectează în planul $z=1$, după cercul $\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$.

```
»syms x y r phi
»fun=int(1, 2-sqrt(4-x^2-y^2, sqrt(4-x^2-y^2))
    fun= 2*sqrt(4-x^2-y^2)-2
»polarfun=simplify(subs(fun,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
    polarfun =
            2*(4-r^2)^(1/2)-2

» polardom=simplify(subs(x^2+y^2-3,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
    polardom =
            r^2-3
» limr=solve(polardom)
    limr =
            [  3^(1/2)]
            [  -3^(1/2)]
» int(int(polarfun*r,r,0,3^(1/2)),0, 2*pi)
    ans =
            10/3*pi
```

Schimbarea clasică de variabile în integralele triple este trecerea la coordonate sferice; în cazul particular al unui elipsoid se folosesc coordonatele sferice generalizate. Prezentăm în continuare mai multe integrale triple, calculate Symbolic math, prin schimbare de variabilă:

- $\iiint_V (z+1)dxdydz$, unde V este mărginită de sfera $x^2+y^2+z^2=9$

  Folosind trecerea la coordonate sferice, este necesar să declarăm ca variabile simbolice, atât coordonatele carteziene cât și cele sferice; apoi calculăm $f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ și descriem în coordonate sferice domeniul de integrare, pentru a determina limitele de integrare:

```
»syms x y z r phi th
»f=z+1;spherfun=simplify (subs(fun, [x,y,z],[r*sin(th)*cos(phi),r*sin(th)*sin(phi),r*cos(th)]))
    spherfun =
            r*cos(th)+1
»spherdom=simplify (subs(x^2+y^2+z^2-9, [x,y,z],[r*sin(th)*cos(phi), r*sin(th)*sin(phi),r*cos(th)]))
    spherdom =
            r^2-9
» limr=solve(spherdom)
    limr =
            [  3]
            [ -3]
```

Așadar $r\in[0,3]$; asupra variabilelor φ și θ nu se impune nici o condiție, așa că $\varphi\in[0,2\pi]$ și $\theta\in[0,\pi]$. În formula de schimbare de variabile avem nevoie de jacobianul transformării, pe care îl vom calcula:

```
».F=[r*sin(th)*cos(phi),r*sin(th)*sin(phi),r*cos(th)];
JF=det(jacobian(F,[r,th,phi]))
    JF =
    sin(th)^3*cos(phi)^2*r^2+sin(th)^3*sin(phi)^2*r^2+r^2*sin(th)*sin(phi)^2*cos(th)^2+r^2*cos(th)^2*
```

```
      cos(phi)^2*sin(th)
» JF=simple(JF)
      JF =
            sin(th)*r^2
»  int(int(int(polarfun*JF,r,0,3),th,0,pi),0,2*pi)
      ans =
            36*pi
```

- $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, unde V este definit de inegalitatea $x^2+y^2+z^2 \le 2x$

```
»  syms x y z r th phi
»  fun=sqrt(x^2+y^2+z^2);
» spherfun=simplify (subs(fun, [x,y,z],[r*sin(th)*cos(phi),r*sin(th)*sin(phi),r*cos(th)]))
      spherfun =
            csgn(r)*r
»  spherdom=simplify (subs(x^2+y^2+z^2-2*x, [x,y,z], [r*sin(th)*cos(phi),r*sin(th)*sin(phi),r*cos(th)]))
      spherdom =
            r^2-2*r*sin(th)*cos(phi)
»  limr=solve(spherdom,r)
      limsr =
            [              0]
            [ 2*sin(th)*cos(phi)]

»int=int(int(int(spherfun*r^2*sin(th),r,0,2*sin(th)*cos(phi)),th,0,pi),
-pi/2,pi/2)
      Warning: Explicit integral could not be found.
      > In C:\MATLAB6P5\toolbox\symbolic\@sym\int.m at line 58
      int =
      int(int(limit(1/4*sin(th)*csgn(r)*r^4,r = 2*sin(th)*cos(phi),left),th = 0 .. pi),th = -1/2*pi .. 1/2*pi)
```

Este posibil ca funcția de integrat csgn(r)*r , să creeze probleme; putem rezolva imediat, ştiind că r este pozitiv:

```
»int=int(int(int(r^3*sin(th),r,0,2*sin(th)*cos(phi)),th,0,pi), -pi/2,pi/2)
      int =
            8/5*pi
```

- $\iiint_V (x+y+z)dxdydz$, unde V este definit de inegalitatea $x^2+y^2+z^2 \le 2y$

Funcția de integrat este relativ simplă şi putem lucra cu următoarea schimbare de variabile, sugerată de inegalitatea ce defineşte domeniul de integrare $x^2+(y-1)^2+z^2 \le 1$ (se translatează de fapt centrul sferei în origine):
$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi+1, z = r\cos\theta$

```
»syms x y z r phi th
»fun=x+y+z;
»spherfun=simplify(subs(fun,[x,y,z], [r*sin(th)*cos(phi), r*sin(th)*sin(phi)+1,r*cos(th)]))
      spherfun =
            r*sin(th)*cos(phi)+r*sin(th)*sin(phi)+1+r*cos(th)
»spherdom=simplify(subs(x^2+y^2+z^2-2*y,[x,y,z], [r*sin(th)*cos(phi),r*sin(th)*sin(phi)+1,r*cos(th)]))
      spherdom =
            r^2-1
» limr=solve(spherdom)
      limr =
            [  1]
            [ -1]
».F=[r*sin(th)*cos(phi),r*sin(th)*sin(phi)+1,r*cos(th)];
JF=det(jacobian(F,[r,th,phi]))
      JF =
      sin(th)^3*cos(phi)^2*r^2+sin(th)^3*sin(phi)^2*r^2+r^2*sin(th)*sin(phi)^2*cos(th)^2+r^2*cos(th)^2*cos(
      phi)^2*sin(th)
» JF=simple(JF)
```

JF =
sin(th)*r^2
» int(int(int(spherfun*r^2*sin(th),phi,0,2*pi),th,0 ,pi),0,1)
ans =
4/3*pi

- $\iiint_V \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}+1}}dxdydz$ unde V este limitat de elipsoidul $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$.

Vom folosi coordonatele sferice generalizate:

```
» syms x y z r phi th
»  f=1/sqrt(x^2/16+y^2/9+z^2/4+1);
 spherfun=simplify(subs(f,[x,y,z],[4*r*sin(th)*cos(phi),3*r*sin(th)*sin(phi),2*r*cos(th)]))
     spherfun =
              (r^2+1)^1/2
»spherdom=simplify(subs(x^2/16+y^2/9+z^2/4-1,[x,y,z],4*r*sin(th)*cos(phi) 3*r*sin(th)*sin(phi),
     2*r*cos(th)]))
     spherdom =
              r^2-1
» limr=solve(polardom)
     limr =
              [  1]
              [ -1]
» F=[4*r*sin(th)*cos(phi), 3*r*sin(th)*sin(phi),2*r*cos(th)];
»JF=det(jacobian(F,[r,th,phi]))
     JF =
     24*sin(th)^3*cos(phi)^2*r^2+24*sin(th)^3*sin(phi)^2*r^2+24*r^2*cos(th)^2*cos(phi)^2*sin(th)+24*r^2*
     sin(th)*sin(phi)^2*cos(th)^2
» JF=simple(JF)
     JF =
              24*sin(th)*r^2
»  int(int(int(spherfun*r^2*sin(th),phi,0,2*pi),th,0 ,pi),0,1)
     ans =
              2*pi*2^(1/2)+2*pi*log(2^(1/2)-1) !
```

Exerciții propuse

1. $\iiint_V (xyz+2)dxdydz$, *unde mulțimea* V *este limitată de conul* $z=\sqrt{x^2+y^2}$ *și de sfera* $x^2+y^2+z^2=1$, *interiorul în raport cu conul.*
2. $\iiint_V (z-1)dxdydz$ unde V este limitat de conul $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ şi emisfera inferioară a sferei $x^2+y^2+z^2=1$.
3. *Calculați volumul corpului limitat conul* $z=\sqrt{x^2+y^2}$ *și de paraboloidul* $z=x^2+y^2$.
4. *Calculați volumul corpului situat deasupra planului* xOy, *limitat paraboloidul* $z=4-x^2-y^2$ *și de cilindrul* $x^2+y^2=1$.
5. $\iiint_V (z^2+xy)dxdydz$, unde mulțimea V se afla în primul octant şi este mărginită de planele de coordonate şi de sfera $x^2+y^2+z^2=4$.
6. $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz$, unde V : $x^2+y^2+z^2\le z$.
7. *Calculați volumul corpului* V : $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}\le 1$