Universitatea din Craiova

Facultatea de Ştiinţe

Specializarea: Matematică

Cicul II - Master - Matematici Aplicate

Teoria generală a ecuațiilor liniare de evoluție în spații Hilbert

Autor:

Prof. Dr. Sorin Micu

2026

Cuprins

1 Operatori nemărginiți **5**
- 1.1 Introducere . . . 5
- 1.2 Operatori maximal-monotoni . . . 6
- 1.3 Exerciții . . . 8

2 Operatorul adjunct **9**
- 2.1 Definiții . . . 9
- 2.2 Operatori autoadjuncți şi antiadjuncți . . . 11
- 2.3 Exerciții . . . 14

3 Semigrupuri și generatori infinitezimali **15**

4 Ecuații abstracte de evoluție **19**
- 4.1 Soluţii clasice . . . 19
- 4.2 Soluţii slabe: abordarea prin semigrupuri . . . 20

5 Dezvoltare Fourier **23**

6 Exemple **27**
- 6.1 Operatorul Laplace în $L^2(\Omega)$ . . . 27
- 6.2 Operatorul Laplace în $H^{-1}(\Omega)$ . . . 28
- 6.3 Operatorul undelor în $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . . . 30
- 6.4 Operatorul undelor în $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ . . . 31
- 6.5 Ecuația căldurii în $L^2(\Omega)$ . . . 32
- 6.6 Ecuația undelor în $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . . . 32
- 6.7 Ecuația undelor în $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ . . . 32

Capitolul 1

Operatori nemărginiți

1.1 Introducere

Fie H un spațiu Hilbert complex cu produsul scalar $(\cdot\,,\cdot)$ și norma corespunzătoare $||\cdot||$.

Definiție 1.1. *O aplicație $A : H \to H$ este un operator liniar mărginit în H dacă*

1. *A este liniară:*

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ u, v \in H);$$

2. *A este mărginită:*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H)} := \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} < \infty.$$

Notăm cu $\mathcal{L}(H)$ mulțimea operatorilor liniari mărginiți în H.

Observație 1.1. *A este mărginit dacă și numai dacă există o constantă $C > 0$ astfel încât*

$$\|Au\| \leq C\|u\| \qquad (u \in H).$$

Orice aplicație mărginită este continuă în zero. Orice operator liniar mărginit este (uniform) continuu.

Exemple:

- $H = \mathbb{C}^n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:
$$u \in H \longrightarrow Au \in H.$$
- $H = L^2(0,1)$, $A : H \to H$
$$u \in H \longrightarrow Au(x) = \int_0^x u(x)\,\mathrm{dx}.$$

Nu toți operatorii liniari interesanți pe un spațiu Hilbert sunt mărginiți - derivarea este exemplul "principal" :). În multe situații operatorul nici măcar nu poate fi definit pe întreg H. Dar chiar dacă definim operatorul pe un subspațiu $D(A)$ al lui H, nu avem

$$\|Au\| \leq C\|u\| \qquad (u \in D(A)). \tag{1.1}$$

Exemplul 1: Fie $H = L^2(0,1)$ (cu funcții cu valori complexe). Fie A derivarea ($Af = f'$) cu domeniul $D(A) = \{f \in H : f \in C^1[0,1]\}$. Mulțimea $D(A)$ este densă în H. De asemenea, A este nemărginit, căci șirul $f_n = \sin(n\pi x)$ este mărginit în $L^2(0,1)$, dar $A(f_n) = n\pi\cos(n\pi x)$ este nemărginit.

Definiție 1.2. *Un **operator liniar nemărginit în** H este o pereche $(D(A), A)$ unde $D(A)$ (domeniul) este un subspațiu al lui H și A (operatorul) este o aplicație liniară definită pe $D(A)$ cu valori în H.*

Observație 1.2. *Un operator liniar nemărginit în H poate satisface (1.1) sau nu. Dacă domeniul $D(A)$ este dens în H și operatorul nemărginit $(D(A), A)$ verifică (1.1), atunci există un unic operator liniar mărginit $\tilde{A}$ în H care extinde A. Așadar, noțiunea de operator liniar nemărginit are sens cu adevărat numai pentru acei operatori care nu satisfac (1.1).*

Dacă domeniul operatorului nemărginit $(D(A), A)$ este clar din context, operatorul va fi notat simplu A. Vom nota cu $R(A)$ și $N(A)$ imaginea, respectiv nucleul operatorului A.

O noțiune mai puțin restrictivă decât mărginirea este următoarea.

Definiție 1.3. *Un operator nemărginit $(D(A), A)$ în spațiul Hilbert H se numește **închis** dacă, pentru orice șir $(u_n)_{n\geq 1} \subset D(A)$ convergent la u în H astfel încât $(Au_n)_{n\geq 1}$ este de asemenea convergent la f în H, avem că $u \in D(A)$ și $Au = f$.*

Observație 1.3. *Operatorul nemărginit $(D(A), A)$ este închis dacă și numai dacă $G_A = \{(u, Au) : u \in D(A)\}$ este închis în $H \times H$.*

Reamintim că Teorema Graficului Închis afirmă că dacă $T : X \to Y$ este un operator liniar între două spații Banach, atunci următoarele sunt echivalente:

1. T este continuu.
2. T este un operator închis (i.e. graficul lui T este închis).

Totuși, în cazul mai general al operatorilor nemărginiți, această echivalență nu are loc în general. Majoritatea operatorilor noștri nemărginiți vor fi închiși, dar nu continui.

Următoarea secțiune este dedicată studiului unei clase de operatori nemărginiți care joacă un rol fundamental în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale.

1.2 Operatori maximal-monotoni

Definiție 1.4. *Operatorul $(D(A), A)$ se numește **monoton** în H dacă $Re\,[(Au, u)] \geq 0$ pentru orice $u \in D(A)$.*

Propoziție 1.1. *Operatorul $(D(A), A)$ este monoton în H dacă și numai dacă pentru orice $\lambda > 0$ și $u \in D(A)$*

$$\lambda||u|| \leq ||(A + \lambda I)u||. \tag{1.2}$$

Demonstraţie. Fie $\lambda > 0$ și $u \in D(A)$. Dacă $(D(A), A)$ este monoton în H rezultă că

$$||(A + \lambda I)u||^2 = ((A + \lambda I)u, (A + \lambda I)u) = ||Au||^2 + \lambda^2||u||^2 + 2\lambda \mathrm{Re}[(Au, u)] \geq \lambda^2||u||^2.$$

Reciproc, dacă (1.2) are loc, rezultă că

$$\lambda^2||u||^2 \leq ||(A+\lambda I)u||^2 = ((A+\lambda I)u,(A+\lambda I)u) = ||Au||^2+\lambda^2||u||^2+2\lambda \mathrm{Re}[(Au,u)].$$

Prin urmare

$$-\frac{1}{2\lambda}||Au||^2 \leq \mathrm{Re}[(Au,u)]$$

iar monotonitatea lui A se obține trecând la limită în ultima inegalitate.

□

Definiție 1.5. *Operatorul $(D(A),A)$ se numește **maximal** în H dacă există $\lambda>0$ astfel încât, pentru orice $f\in H$, există $u\in D(A)$ cu $(A+\lambda I)u=f$, adică $R(A+\lambda I)=H$.*

Observație 1.4. *Fie $(D(A),A)$ un operator maximal-monoton și $\lambda>0$ astfel încât, pentru orice $f\in H$, ecuația $(A+\lambda I)u=f$ are o soluție $u\in D(A)$. Rezultă că operatorul $A+\lambda I$ este surjectiv. Pe de altă parte, din $(A+\lambda I)u=0$ obținem*

$$\lambda(u,u) \leq Re\,[(Au,u)]+\lambda(u,u) = Re\,[((A+\lambda I)u,u)] = 0,$$

deci $A+\lambda I$ este și injectiv.

Prin urmare, operatorul $A+\lambda I: D(A)\to H$ este inversabil. Mai mult, pentru orice $u\in D(A)$,

$$\lambda||u||^2 \leq Re\,[(Au,u)]+\lambda(u,u) = Re\,[((A+\lambda I)u,u)] \leq |((A+\lambda I)u,u)| \leq ||(A+\lambda)u||\,||u||,$$

inversul său $J_\lambda=(A+\lambda I)^{-1}: H\to D(A)$ este continuu și $||J_\lambda||\leq \frac{1}{\lambda}$.

Observație 1.5. *Dacă $(D(A),A)$ este un operator maximal-monoton, are loc următoarea proprietate: pentru orice $\lambda>0$ și $f\in H$ există $u\in D(A)$ cu $(A+\lambda I)u=f$. Într-adevăr, să presupunem că există $\lambda_0>0$ astfel încât $R(A+\lambda_0 I)=H$. Demonstrăm că $R(A+\lambda I)=H$ pentru orice $\lambda<2\lambda_0$.*

Fie $f\in H$ și $0<\lambda<2\lambda_0$. Căutăm $u\in H$ astfel încât $(A+\lambda I)u=f$ sau, echivalent

$$u=(A+\lambda_0 I)^{-1}[f+(\lambda_0-\lambda)u].$$

Dacă notăm $G(u)=(A+\lambda_0 I)^{-1}[f+(\lambda_0-\lambda)u]$, problema se reduce la a demonstra existența unui punct fix pentru G în H. Dar G este o contracție deoarece

$$||G(u_1)-G(u_2)|| = ||(A+\lambda_0 I)^{-1}[(\lambda_0-\lambda)(u_1-u_2)]|| \leq \frac{|\lambda_0-\lambda|}{\lambda_0}||u_1-u_2||$$

și $\frac{|\lambda_0-\lambda|}{\lambda_0}<1$ dacă $\lambda<2\lambda_0$.

Din Teorema Punctului Fix a lui Banach rezultă că G are un punct fix în H. Am demonstrat că $R(A+\lambda I)=H$ dacă $\lambda<2\lambda_0$. Un argument iterativ ne permite să deducem că $R(A+\lambda I)=H$ pentru orice $\lambda>0$.

Prin urmare, pentru orice $\lambda>0$ se poate defini un operator J_λ ca în observația anterioară și $||J_\lambda||\leq\frac{1}{\lambda}$.

Propoziție 1.2. *Dacă $(D(A),A)$ este un operator maximal-monoton în spațiul Hilbert H, atunci*

1. *$D(A)$ este dens în H*
2. *A este închis.*

Demonstrație. Din definiția unui operator maximal și monoton și din Observația 1.4, rezultă că există $\lambda > 0$ astfel încât $A + \lambda I$ este inversabil, iar inversul său, notat J_λ, este continuu.

Pentru a demonstra densitatea lui $D(A)$, fie $z \in H$ astfel încât $(z, v) = 0$ pentru orice $v \in D(A)$. Există un unic $u \in D(A)$ astfel încât $(A + \lambda I)u = z$. Rezultă că

$$0 = (z, u) = ((A + \lambda I)u, u) = (Au, u) + \lambda(u, u).$$

Din monotonitatea lui A, $\mathrm{Re}\,[(Au, u)] \geq 0$ și prin urmare $(u, u) = 0$. Rezultă că $z = 0$, ceea ce demonstrează densitatea lui $D(A)$ în H.

Pentru a demonstra că A este închis, fie $(u_n)_{n\geq 1} \subset D(A)$ un șir convergent la u în H astfel încât $(Au_n)_{n\geq 1}$ este de asemenea convergent la f în H. Rezultă că $(A + \lambda I)(u_n)$ converge la $f + \lambda u$. Deoarece $(A+\lambda I)^{-1}$ este un operator continuu în H, obținem că $u_n = (A+\lambda I)^{-1}(A+\lambda I)(u_n)$ tinde la $(A+\lambda I)^{-1}(f+\lambda u)$ când n tinde la infinit. Din unicitatea limitei, rezultă că $u = (A+\lambda I)^{-1}(f+\lambda u)$. Prin urmare, $u \in D(A)$ și $Au = f$. În consecință, A este un operator închis. □

1.3 Exerciții

1. Arătați că dacă $(D(A), A)$ este monoton, atunci

$$\|(A + zI)u\| \geq \Re(z)\|u\| \qquad (u \in D(A),\ z \in \mathbb{C}_+^*.)$$

   (Dacă A este monoton, la fel este și $A + ibI$.)

2. Fie $(D(A), A)$ un operator nemărginit, închis și monoton în spațiul Hilbert H. Atunci, pentru orice $z \in \mathbb{C}_+^*$, $R(A + zI)$ este o mulțime închisă în H.

Capitolul 2

Operatorul adjunct

2.1 Definiții

Fie $(D(A), A)$ un operator nemărginit al cărui domeniu $D(A)$ este dens în H. Definim

$$D(A^*) = \{v \in H \ : \ \text{există } C < \infty \text{ astfel încât } |(Au, v)| \leq C||u||, \ \forall u \in D(A)\}. \tag{2.1}$$

Pentru orice $v \in D(A^*)$ aplicația $u \in D(A) \longrightarrow (v, Au) \in \mathbb{C}$ poate fi extinsă prin continuitate la o aplicație liniară și continuă de la H la $\mathbb{C}$. Din Teorema lui Riesz, există un unic $A^*v \in H$ astfel încât

$$(A^*v, u) = (v, Au), \ \forall u \in D(A). \tag{2.2}$$

Este ușor de văzut că aplicația care asociază fiecărui $v \in D(A^*)$ pe A^*v este liniară. Prin urmare, $(D(A^*), A^*)$ este un operator (nemărginit) în H.

Definiție 2.1. *Operatorul $(D(A^*), A^*)$ definit de (2.1)-(2.2) se numește operatorul adjunct al lui $(D(A), A)$.*

Propoziție 2.1. *Fie $(D(A), A)$ un operator nemărginit al cărui domeniu $D(A)$ este dens în H. Operatorul adjunct $(D(A^*), A^*)$ este închis în H.*

Demonstrație: Fie $(v_n)_{n\geq 1} \subset D(A^*)$ un șir convergent la v în H astfel încât $(A^*v_n)_{n\geq 1}$ este de asemenea convergent la g în H. Trecând la limită în egalitatea

$$(A^*v_n, u) = (v_n, Au), \ \forall u \in D(A)$$

obținem

$$(g, u) = (v, Au), \ \forall u \in D(A).$$

Rezultă că $v \in D(A^*)$ și $A^*v = g$. Astfel, operatorul adjunct este închis.

■

Propoziție 2.2. *Fie $(D(A), A)$ un operator monoton în H cu domeniu dens. Dacă A^* este monoton și A este închis, atunci $(D(A), A)$ este maximal.*

Demonstrație: Deoarece A este închis și monoton, $R(A+I)$ este un subspațiu închis al lui H. Într-adevăr, fie $(u_n)_{n\geq 1} \subset D(A)$ un șir astfel încât $((A+I)u_n)_{n\geq 1}$ converge la $f \in H$. Din inegalitățile

$$||u_n - u_m||^2 \leq \mathrm{Re}\,[((A+I)(u_n-u_m), u_n-u_m)] \leq ||u_n-u_m||\,||(A+I)(u_n-u_m)||$$

obținem că $(u_n)_{n\geq 1}$ este un șir Cauchy în H. Prin urmare, $(u_n)_{n\geq 1}$ converge la $u \in H$. Din închiderea lui $A+I$ obținem că $u \in D(A)$ și $(A+I)u = f$. Așadar, $f \in R(A+I)$ și $R(A+I)$ este închis în H.

Dacă arătăm că $R(A+I)$ este și dens în H, rezultă că $R(A+I) = H$ și demonstrația se încheie.

Să presupunem că $z \in H$ este astfel încât $(z,w) = 0$ pentru orice $w \in R(A+I)$, ceea ce este echivalent cu $(z, Au+u) = 0$ pentru orice $u \in D(A)$. Rezultă că,

$$|(z,Au)| = |-(z,u)| \leq ||z||\,||u||,\ \forall u \in D(A)$$
$$(z,Au) = -(z,u),\ \forall u \in D(A).$$

Prin urmare, $z \in D(A^*)$ și $A^*z = -z$. Deoarece A^* este monoton, obținem că

$$-||z||^2 = (-z,z) = \mathrm{Re}\,[(-z,z)] = \mathrm{Re}\,[(A^*z,z)] \geq 0.$$

Așadar, $z = 0$ și densitatea lui $R(A+I)$ este demonstrată.

■

Propoziție 2.3. *Fie $(D(A),A)$ un operator maximal-monoton în H și J_λ operatorul definit în Observația 1.5. Atunci, pentru orice $u \in H$*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda J_\lambda u = u. \tag{2.3}$$

Demonstrație: Este suficient să considerăm $u \in D(A)$ (cazul general rezultă din densitatea lui $D(A)$ în H). Avem

$$||\lambda J_\lambda u - u|| \leq \lambda ||J_\lambda||\,||u - \frac{1}{\lambda}(A+\lambda I)u|| \leq \frac{1}{\lambda}||Au||$$

iar (2.3) rezultă imediat.

■

Observație 2.1. *Reciproca Propoziției 2.2 este de asemenea adevărată (vezi [?], p....). Într-adevăr, dacă $(D(A),A)$ este maximal-monoton, din Propoziția 1.2 rezultă că este închis. Pentru a demonstra că A^* este monoton, fie $v \in D(A^*)$. Avem că*

$$Re\,[(A^*v, J_\lambda v)] = Re\,[(v, AJ_\lambda v)] = (v,v) - Re\,[\lambda(v, J_\lambda v)] \geq ||v||^2 - \lambda||J_\lambda||\,||v||^2 \geq 0.$$

Prin urmare, pentru orice $v \in D(A^*)$ și $\lambda > 0$ avem

$$(A^*v, \lambda J_\lambda v) \geq 0.$$

Folosind (2.3) și trecând la limită în ultima inegalitate, obținem că $Re\,[(A^*v,v)] \geq 0$, ceea ce demonstrează monotonitatea lui A^*.

2.2 Operatori autoadjuncți şi antiadjuncți

Următoarele clase de operatori sunt foarte importante în multe aplicații.

Definiție 2.2. *Operatorul $(D(A), A)$ se numește* ***autoadjunct*** *dacă $D(A) = D(A^*)$ și $A = A^*$. Operatorul $(D(A), A)$ se numește* ***skew-adjunct*** *dacă $D(A) = D(A^*)$ și $A = -A^*$.*

Operatorii autoadjuncți și skew-adjuncți au proprietăți de monotonie și maximalitate.

Propoziție 2.4. *Fie $(D(A), A)$ un operator autoadjunct și monoton în H, cu domeniul dens. Atunci A este maximal.*

Demonstrație: Deoarece A este monoton și $A = A^*$, rezultă că A^* este monoton. Mai mult, deoarece A^* este închis și $A = A^*$, A este de asemenea închis. Din Propoziția 2.2, rezultă că A este maximal.

■

Propoziție 2.5. *Fie $(D(A), A)$ un operator skew-adjunct în H, cu domeniul dens. Atunci A și $-A$ sunt maximali și monoton.*

Demonstrație: Deoarece $(Au, u) = (u, A^*u) = -(u, Au) = -\overline{(Au, u)}$, rezultă că $\mathcal{R}\mathrm{e}[(Au, u)] = 0$ pentru orice $u \in D(A)$. Astfel A și $-A$ sunt monoton. Maximalitatea lui A se obține din Propoziția 2.2, ținând cont că $A^* = -A$ este monoton și $A = -A^*$ este închis.

■

Definiție 2.3. *Operatorul $(D(A), A)$ se numește* ***simetric*** *dacă*

$$(Au, v) = (u, Av) \qquad (u, v \in D(A)).$$

Pentru operatori mărginiți, noțiunile de operator simetric și autoadjunct coincid. Totuși, dacă A este nemărginit, există o diferență subtilă între operatorii simetrici și autoadjuncți. În mod clar, orice operator autoadjunct este simetric. Reciproca nu este adevărată: un operator A este simetric dacă și numai dacă $D(A) \subset D(A^*)$ și $A^* = A$ pe $D(A)$. Se poate întâmpla ca A să fie simetric și $D(A) \neq D(A^*)$.

Observație 2.2. *Pentru un operator simetric cu domeniu dens, avem:*

$$A \subset A^*,$$

adică $D(A) \subset D(A^*)$ și A^* coincide cu A pe $D(A)$.

Aceasta este diferența fundamentală față de operatorii autoadjuncți: pentru un operator simetric, $D(A)$ poate fi mai mic decât $D(A^*)$, în timp ce pentru un operator autoadjunct avem $D(A) = D(A^*)$ și $A = A^*$.

Exemplul 1: Operatorul $i\frac{d}{dx}$ pe $L^2(0,1)$
Fie $H = L^2(0,1)$ și definim:

$$D(A) = \{u \in C^1[0,1] \mid u(0) = u(1) = 0\}, \quad Au = iu'.$$

Acest operator este simetric, deoarece pentru $u, v \in D(A)$:

$$(Au, v) = \int_0^1 iu'(x)\overline{v(x)}\,dx = i[u(x)\overline{v(x)}]_0^1 - i\int_0^1 u(x)\overline{v'(x)}\,dx = (u, iv') = (u, Av),$$

după o integrare prin părți și folosind condițiile la limită.

Exemplul 2: Operatorul Laplace pe $L^2(\Omega)$ cu condiții Dirichlet este simetric și maximal-monoton, deci autoadjunct. Acesta este un exemplu fundamental în analiza ecuațiilor cu derivate parțiale.

Teoremă 2.1. *Fie $(D(A), A)$ un operator maximal-monoton în spațiul Hilbert H. Dacă A este simetric, atunci A este autoadjunct.*

Demonstraţie. Vom demonstra în mai mulți pași.

Pasul 1: Proprietăți ale operatorilor maximal-monotoni Din definiția maximal-monotonului, știm că există $\lambda > 0$ astfel încât $A + \lambda I$ este inversabil și surjectiv. Mai mult, pentru orice $\mu > 0$, operatorul $A+\mu I$ este de asemenea inversabil (se poate demonstra printr-un argument de contracție).

Pasul 2: Incluziunea $D(A) \subset D(A^*)$ Pentru orice operator simetric, avem $A \subset A^*$, adică $D(A) \subset D(A^*)$ și $A^*u = Au$ pentru $u \in D(A)$.

Pasul 3: Arătăm că $D(A^*) \subset D(A)$ Fie $v \in D(A^*)$. Din maximalitatea lui A, există $u \in D(A)$ astfel încât:

$$(A + \lambda I)u = (A^* + \lambda I)v.$$

Considerăm diferența $(A + \lambda I)(u - v)$ și calculăm produsul scalar cu $u - v$:

$$((A + \lambda I)(u - v), u - v) = ((A^* + \lambda I)v - (A + \lambda I)v, u - v).$$

Pe de o parte, folosind monotonitatea lui A:

$$\mathrm{Re}((A + \lambda I)(u - v), u - v) \geq \lambda\|u - v\|^2.$$

Pe de altă parte, folosind definiția adjunctului:

$$((A^* + \lambda I)v, u - v) = (v, (A + \lambda I)(u - v)).$$

Deoarece $(A + \lambda I)u = (A^* + \lambda I)v$, avem:

$$((A^* + \lambda I)v - (A + \lambda I)v, u - v) = ((A^* - A)v, u - v).$$

Acum, folosim faptul că $v \in D(A^*)$ și că A este simetric. Pentru orice $w \in D(A)$, avem:

$$((A^* - A)v, w) = (v, Aw) - (Av, w) = (v, Aw) - (v, Aw) = 0.$$

Aceasta arată că $((A^* - A)v, w) = 0$ pentru orice $w \in D(A)$. Deoarece $D(A)$ este dens în H, rezultă că $(A^* - A)v = 0$. Așadar, $A^*v = Av$ (deși Av nu este încă definit, această egalitate trebuie înțeleasă în sensul că $v \in D(A)$).

Mai riguros, din relația $((A^* - A)v, w) = 0$ pentru orice $w \in D(A)$, deducem că $(A^*v, w) = (Av, w)$. Dar Av nu este definit. Totuși, putem folosi un argument de aproximare pentru a arăta că $v \in D(A)$.

Alternativ, putem folosi inegalitatea obținută:

$$\lambda\|u - v\|^2 \leq \mathrm{Re}((A + \lambda I)(u - v), u - v) = \mathrm{Re}(((A^* - A)v, u - v)).$$

Deoarece $((A^* - A)v, w) = 0$ pentru orice $w \in D(A)$, în particular pentru $w = u - v \in D(A)$ (deoarece $u \in D(A)$ și v nu este încă în $D(A)$, această alegere nu este validă). Trebuie să fim mai atenți.

O demonstrație mai elegantă folosește faptul că operatorul $(A+\lambda I)$ este inversabil și că $(A^*+\lambda I)$ este extensia sa. Din $(A + \lambda I)u = (A^* + \lambda I)v$ și faptul că $(A^* + \lambda I)$ este injectiv (deoarece A^* este monoton), obținem $u = v$. Așadar, $v = u \in D(A)$.

Pasul 4: Concluzia Din pașii 2 și 3, avem $D(A) = D(A^*)$. Deoarece A este simetric, A^* coincide cu A pe acest domeniu. Așadar, $A = A^*$ și A este autoadjunct. □

Observație 2.3. *Această teoremă este esențială în teoria operatorilor maximal-monotoni. Ea arată că, pentru operatorii maximal-monotoni, simetria implică autoadjunct. Reciproca este evidentă: orice operator autoadjunct și monoton este maximal-monoton (așa cum am văzut într-o propoziție anterioară).*

Observație 2.4. *Această teoremă justifică de ce, în multe aplicații, operatorii simetrici maximal-monotoni sunt numiți autoadjuncți. Ea leagă două proprietăți fundamentale: monotonia și simetria, și arată că împreună ele implică autoadjunct.*

Încheiem această secțiune cu o proprietate care stabilește o relație între operatorii autoadjuncți și skew-adjuncți în H.

Propoziție 2.6. *Fie H un spațiu Hilbert complex. Următoarele proprietăți sunt echivalente.*

1. *$(D(A), A)$ este autoadjunct.*
2. *$(D(A), iA)$ este skew-adjunct.*

Demonstrație: Să considerăm operatorul $(D(A), A)$ și să determinăm adjunctul lui $(D(A), iA)$. Avem

$$D((iA)^*) = \{v \in H : \text{există } c > 0 \text{ astfel încât } |(iAu, v)| \leq c||u|| \text{ pentru orice } u \in D(A)\} =$$

$$= \{v \in H : \text{există } c > 0 \text{ astfel încât } |(Au, v)| \leq c||u|| \text{ pentru orice } u \in D(A)\} = D(A^*).$$

Pe de altă parte, pentru orice $u, v \in D(A) = D(iA)$, avem

$$(iAu, v) = i(Au, v) = i(u, A^*v) = (u, -iA^*v).$$

Dacă $(D(A), A)$ este autoadjunct, rezultă că $D((iA)^*) = D(A^*) = D(A) = D(iA)$ și $(iA)^* = -iA$. Prin urmare, $(D(A), iA)$ este skew-adjunct. Reciproc, dacă $(D(A), iA)$ este skew-adjunct, rezultă că $D(A) = D(iA) = D((iA)^*) = D(A^*)$ și $A^* = A$. Așadar, $(D(A), A)$ este autoadjunct.

■

2.3 Exerciții

1. Dacă $A \in \mathcal{L}(H)$ atunci $\|A\| = \|A^*\|$ și $A^{**} = A$.

2. Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ și fie $A : D(A) \subset H \to H$ un operator liniar nemărginit în spațiul Hilbert H, dens definit și închis. Considerăm operatorul $B : D(B) \subset H \to H$ definit prin $D(B) = D(A)$, $B = A + T$.

   (a) Demonstrați că $(D(B), B)$ este închis.

   (b) Demonstrați că $D(B^*) = D(A^*)$ și $B^* = A^* + T^*$.

3. Fie $(D(A), A)$ operatorul nemărginit definit de

$$H = L^2(0,1), \quad D(A) = \{u \in H \,:\, u' \in H,\ u(0) = u(1)\}, \quad Au = iu'.$$

   Găsiți operatorul adjunct $(D(A^*), A^*)$. Operatorul inițial este autoadjunct?

4. Fie $A : D(A) \subset H \to H$ un operator liniar nemărginit în spațiul Hilbert H, dens definit și închis. Următoarele proprietăți sunt echivalente:

   (a) A este surjectiv, adică $R(A) = H$

   (b) Există o constantă C astfel încât

$$\|v\| \le C\|A^*v\| \qquad (v \in D(A^*));$$

   (c) $N(A^*) = \{0\}$ și $R(A^*)$ este închis.

   Dacă presupunem că $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ (în dimensiune finită), atunci următoarele sunt echivalente:

$$A \text{ surjectiv } \Leftrightarrow A^* \text{ injectiv},$$

$$A^* \text{ surjectiv } \Leftrightarrow A \text{ injectiv},$$

   ceea ce este într-adevăr un rezultat clasic pentru operatori liniari în spații finit-dimensionale. Motivul pentru care aceste echivalențe au loc este că $R(A)$ și $R(A^*)$ sunt finit-dimensionale (și deci închise). În cazul general avem doar implicațiile

$$A \text{ surjectiv } \Rightarrow A^* \text{ injectiv},$$

$$A^* \text{ surjectiv } \Rightarrow A \text{ injectiv}.$$

Capitolul 3

Semigrupuri și generatori infinitezimali

Definiție 3.1. *O familie de operatori liniari și continui în H, $(S(t))_{t\geq 0}$, se numește semigrup de contracții în H dacă*

1. $||S(t)|| = 1,\ \forall t \geq 0$
2. $S(0) = I$
3. $S(t+s) = S(t)S(s),\ \forall t, s \geq 0$
4. $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} S(t)u = u,\ \forall u \in H.$

Observație 3.1. *Dacă $(S(t))_{t\geq 0}$ este un semigrup de contracții și $u \in H$, atunci $S(\,\cdot\,)u \in C([0,\infty), H)$. Într-adevăr, pentru orice $t_0 \geq 0$ și $t \geq t_0$ avem*

$$0 \leq ||S(t)u - S(t_0)u|| = ||S(t_0)(S(t-t_0)u - u)|| \leq ||S(t_0)||\,||S(t-t_0)u - u|| \leq ||S(t-t_0)u - u||.$$

Pe de altă parte pentru $t < t_0$,

$$0 \leq ||S(t)u - S(t_0)u|| = ||S(t)(u - S(t_0 - t)u)|| \leq ||S(t)||\,||u - S(t_0 - t)u|| \leq ||u - S(t_0 - t)u||.$$

Deoarece $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} S(t)u = u$, rezultă că $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t>t_0}} S(t-t_0)u = \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}} S(t-t_0)u = u$ și prin urmare

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t>t_0}} ||S(t)u - S(t_0)u|| = \lim_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}} ||S(t)u - S(t_0)u|| = 0.$$

Definiție 3.2. *Dacă $(S(t))_{t\geq 0}$ este un semigrup de contracții în H, operatorul nemărginit $(D(A), A)$ definit de*

$$D(A) = \left\{ u \in H \,:\, \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{S(h)u - u}{h} \text{ există în } H \right\}$$

$$Au = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{S(h)u - u}{h}$$

se numește generatorul infinitezimal al semigrupului $(S(t))_{t\geq 0}$.

Teoremă 3.1. *Fie $(D(A), A)$ generatorul infinitezimal al semigrupului de contracții în H $(S(t))_{t\geq 0}$. Dacă $u \in D(A)$, atunci $S(t)u \in D(A)$ și $S(t)Au = AS(t)u$ pentru orice $t \geq 0$.*

Mai mult, aplicația $S(\cdot)u : [0, \infty) \to H$ este derivabilă și

$$\frac{dS(t)u}{dt} = S(t)Au. \tag{3.1}$$

Demonstrație: Deoarece $u \in D(A)$ și $(D(A), A)$ este generatorul infinitezimal al semigrupului $(S(t))_{t\geq 0}$, avem că

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{S(h)u - u}{h} = Au \in H. \tag{3.2}$$

Ținând cont de proprietățile unui semigrup, rezultă că

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{S(h)S(t)u - S(t)u}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} S(t)\left(\frac{S(h)u - u}{h}\right) = S(t)\left(\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{S(h)u - u}{h}\right) = S(t)Au.$$

Prin urmare, $S(t)u \in D(A)$ și $AS(t)u = S(t)A(u)$.

Pentru a doua parte a demonstrației, să evaluăm

$$\frac{S(t+h)u - S(t)u}{h} - S(t)Au.$$

Pentru $h > 0$ avem că

$$\left|\left|\frac{S(t+h)u - S(t)u}{h} - S(t)Au\right|\right| = \left|\left|S(t)\left(\frac{S(h)u - u}{h} - Au\right)\right|\right| \leq \left|\left|\frac{S(h)u - u}{h} - Au\right|\right|.$$

Pentru $h < 0$ avem că

$$\left|\left|\frac{S(t+h)u - S(t)u}{h} - S(t)Au\right|\right| = \left|\left|S(t+h)\left(\frac{S(-h)u - u}{h} - S(-h)Au\right)\right|\right| \leq \left|\left|\frac{S(-h)u - u}{h} - S(-h)Au\right|\right| \leq$$

$$\leq \left|\left|\frac{S(-h)u - u}{h} + Au\right|\right| + ||-Au + S(-h)Au|| = \left|\left|\frac{S(-h)u - u}{-h} - Au\right|\right| + ||S(-h)Au - Au||.$$

Când h tinde la zero, obținem (3.1).

■

Definiție 3.3. *O familie de operatori liniari și continui în H, $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$, se numește grup de izometrii în H dacă*

1. $||T(t)u|| = ||u||, \ \forall u \in H, \ \forall t \in \mathbb{R}$
2. $T(0) = I$
3. $T(t+s) = T(t)T(s), \ \forall t, s \in \mathbb{R}$
4. $\lim_{t\to 0} T(t)u = u, \ \forall u \in H.$

Observație 3.2. *Dacă $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ este un grup de izometrii și $u \in H$, atunci $S(\cdot)u \in C(\mathbb{R}, H)$. Într-adevăr, pentru orice $t_0 \in \mathbb{R}$ avem*

$$0 \leq ||T(t)u - T(t_0)u|| = ||T(t_0)(T(t-t_0)u - u)|| = ||T(t-t_0)u - u||.$$

Deoarece $\lim_{t\to 0} T(t)u = u$, rezultă că $\lim_{t\to t_0} T(t-t_0)u = u$ și prin urmare

$$\lim_{t\to t_0} ||T(t)u - T(t_0)u|| = 0.$$

Definiție 3.4. *Dacă $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ este un grup de izometrii în H, operatorul nemărginit $(D(A), A)$ definit de*

$$D(A) = \left\{ u \in H \,:\, \lim_{h\to 0} \frac{T(h)u - u}{h} \text{ există în } H \right\}$$

$$Au = \lim_{h\to 0} \frac{T(h)u - u}{h}$$

se numește generatorul infinitezimal al grupului $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$.

Ca și în cazul unui semigrup, următoarea proprietate are loc

Teoremă 3.2. *Fie $(D(A), A)$ generatorul infinitezimal al grupului de izometrii în H $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$. Dacă $u \in D(A)$, atunci $T(t)u \in D(A)$ și $T(t)Au = AT(t)u$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.*

Mai mult, aplicația $T(\cdot)u : \mathbb{R} \to H$ este derivabilă și

$$\frac{dT(t)u}{dt} = T(t)Au. \tag{3.3}$$

Demonstrație: Este similară cu 3.1 și o omitem.

■

Următorul rezultat important stabilește relația dintre semigrupuri și operatori maximal-monotoni.

Teoremă 3.3. *(Hille-Yosida-Phillips) Fie $(D(A), A)$ un operator nemărginit în spațiul Hilbert H. Următoarele proprietăți sunt echivalente:*

1. *$(D(A), A)$ este un operator maximal-monoton în H.*
2. *$(D(A), -A)$ este generatorul infinitezimal al unui semigrup de contracții.*

Pentru o demonstrație a Teoremei Hille-Yosida-Phillips, vezi [**?**] Teorema 3.4.3, p. 34.

Observație 3.3. *Din Propoziția 2.4 și Teorema Hille-Yosida-Phillips, dacă A este monoton și autoadjunct, atunci $(D(A), -A)$ este generatorul infinitezimal al unui semigrup de contracții în H.*

Următoarea teoremă de unicitate are loc.

Teoremă 3.4. *Fie $(S_1(t))_{t\geq 0}$ și $(S_2(t))_{t\geq 0}$ două semigrupuri de contracții cu generatorii infinitezimali $(D(A_1), A_1)$ și $(D(A_2), A_2)$ respectiv. Dacă $(D(A_1), A_1) = (D(A_2), A_2)$, atunci*

$$S_1(t)u = S_2(t)u \text{ pentru orice } u \in H \text{ și } t \geq 0. \tag{3.4}$$

Demonstrație: Deoarece $(D(A_1), A_1)$ este generatorul infinitezimal al unui semigrup de contracții, rezultă că este maximal-monoton și $D(A_1)$ este dens în H. Prin urmare, este suficient să demonstrăm (3.4) pentru $u \in D(A_1) = D(A_2)$ și $t > 0$.

Definim aplicația $G : [0, t] \to H$, $G(s) = S_1(t-s)S_2(s)u$. Deoarece $u \in D(A_1) = D(A_2)$, din Teorema 3.1 rezultă că G este derivabilă în s. Mai mult, avem

$$\frac{dG}{dt}(t) = -A_1 S(t-s)S_2(s)u + S_1(t-s)S_2(s)A_2 u = -S(t-s)A_1 S_2(s)u + S_1(t-s)A_1 S_2(s)u = 0.$$

Rezultă că G este constantă și $G(0) = G(t)$. Aceasta este echivalentă cu $S_1(t)u = S_2(t)u$, ceea ce încheie demonstrația.

■

Observație 3.4. *Din Teorema Hille-Yosida-Phillips și Teorema 3.4 rezultă că există o corespondență biunivocă între mulțimea operatorilor maximal-monotoni și mulțimea semigrupurilor de contracții în H.*

Relația dintre grupuri și operatori maximal-monotoni este următoarea

Teoremă 3.5. *Fie $(D(A), A)$ un operator nemărginit în spațiul Hilbert H. Următoarele proprietăți sunt echivalente:*

1. *$(D(A), A)$ și $(D(A), -A)$ sunt operatori maximal-monotoni în H.*
2. *$(D(A), A)$ este generatorul infinitezimal al unui grup de izometrii.*

Pentru o demonstrație a Teoremei 3.5, vezi [**?**] Proprietatea 3.4.6.

Observație 3.5. *Din Propoziția 2.5 și Teorema anterioară, dacă A este skew-adjunct, atunci $(D(A), -A)$ este generatorul infinitezimal al unui grup de izometrii în H.*

Capitolul 4

Ecuaţii abstracte de evoluţie

În această secțiune considerăm următoarea clasă generală de ecuații de evoluție

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0, \quad t > 0 \\ u(0) = u^0 \end{cases} \tag{4.1}$$

unde $(D(A), A)$ este un operator nemărginit în spațiul Hilbert H.

4.1 Soluţii clasice

Definiție 4.1. *O soluție clasică a lui (4.1) este o aplicație $u \in C([0,\infty), H)$ astfel încât*

1. $u(0) = u^0$
2. $u(t) \in D(A)$ *pentru orice* $t > 0$
3. u *este derivabilă în* H
4. $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0$ *pentru orice* $t > 0$.

Următorul rezultat de unicitate are loc

Teoremă 4.1. *Dacă $(D(A), A)$ este maximal-monoton și $u^0 \in D(A)$, atunci există o unică soluție clasică a lui (4.1).*

Demonstrație: Existența este o consecință a 3.1. Într-adevăr, fie $(S(t))_{t\geq 0}$ semigrupul de contracții al cărui generator infinitezimal este $(D(A), -A)$ (existența semigrupului este asigurată de Teorema Hille-Yosida-Phillips). Definim $u(t) = S(t)u^0$ pentru orice $t \geq 0$. Observația 3.1 implică $u \in C([0,\infty), H)$. Mai mult, deoarece $u^0 \in D(A)$, din Teorema 3.1 obținem că $u(t) = S(t)u^0 \in D(A)$ și

$$\frac{du}{dt}(t) = S(t)(-Au) = -AS(t)u$$

pentru orice $t \geq 0$. Prin urmare, u este o soluție clasică a lui (4.1).

Pentru a demonstra unicitatea, să presupunem că u și v sunt două soluții ale lui (4.1) și fie $w = u - v$. Rezultă că

$$\frac{d}{dt}(w, w) = 2\mathrm{Re}(w, \frac{dw}{dt}) = -2\mathrm{Re}(w, Aw) \leq 0.$$

Prin urmare, funcția $t \to ||w(t)||$ este nenegativă și descrescătoare. Deoarece $||w(0)|| = 0$, rezultă că $||w(t)|| = 0$ pentru orice $t \geq 0$ și deci $u = v$.

■

Să considerăm că $(D(A), A)$ este un operator maximal-monoton în H și să definim următoarea formă biliniară

$$((u, v)) = (u, v) + (Au, Av), \text{ pentru orice } u, v \in D(A). \tag{4.2}$$

Este imediat că $((\cdot, \cdot))$ este un produs scalar în $D(A)$. Fie $||| \cdot |||$ norma corespunzătoare.

Propoziție 4.1. *$D(A)$ înzestrat cu produsul scalar definit de (4.2) este un spațiu Hilbert.*

Demonstrație: Fie $(u_n)_{n\geq 1}$ un șir Cauchy în $D(A)$ în raport cu norma $||| \cdot |||$. Rezultă că $u_n \to u \in H$ și $Au_n \to f \in H$ când n tinde la infinit. Deoarece $(D(A), A)$ este închis, $u \in D(A)$ și $Au = f$. Mai mult, $(u_n)_{n\geq 1}$ converge la u în norma $||| \cdot |||$.

■

Propoziție 4.2. *Dacă $u^0 \in D(A)$ și u este soluția clasică a lui (4.1), atunci*

$$u \in C([0, \infty), D(A)) \cap C^1([0, \infty), H). \tag{4.3}$$

Demonstrație: Faptul că $u \in C^1([0, \infty), H)$ rezultă din $u(t) = S(t)u^0$ și (3.1).

Pentru a demonstra că $u \in C([0, \infty), D(A))$, observăm că

$$|||u(t+h)-u(t)|||^2 = |||S(t+h)U^0-S(t)u^0|||^2 = ||S(t+h)u^0-S(t)u^0||^2+||A(S(t+h)u^0-S(t)u^0)||^2 =$$

$$= ||S(t + h)u^0 - S(t)u^0||^2 + ||S(t + h)Au^0 - S(t)Au^0||^2$$

și folosim continuitatea aplicației $S(\cdot)v$.

■

Am demonstrat existența unei soluții clasice a lui (4.1) când $u^0 = u(0) \in D(A)$. Totuși, în multe cazuri se dorește să "rezolvăm" (4.1) chiar dacă $u^0 \in H$. Suntem conduși la noțiunea de soluție slabă, care va fi introdusă în două moduri diferite.

4.2 Soluţii slabe: abordarea prin semigrupuri

Pentru a extinde clasa de soluții ale lui (4.1), să considerăm că $(D(A), A)$ este un operator maximal-monoton care generează un semigrup de contracții $(S(t))_{t\geq 0}$ în H.

Definiție 4.2. *Pentru orice $u^0 \in H$, aplicația $u \in C([0, \infty), H)$, $u(t) = S(t)u^0$ pentru orice $t \geq 0$, se numește soluția slabă a lui (4.1).*

Teorema 4.1 arată că soluția slabă a lui (4.1) este una clasică atunci când datele inițiale u^0 aparțin lui $D(A)$.

O întrebare interesantă este următoarea: în ce sens verifică o soluție slabă ecuația (4.1)? Există mai multe posibilități mai mult sau mai puțin echivalente pentru a răspunde la această întrebare. Teoria extrapolării oferă un posibil răspuns ([**?**]). Unul diferit se datorează lui Ball (vezi [**?**]).

Să descriem pe scurt metoda extrapolării.

Teoremă 4.2. *Fie $(D(A), A)$ un operator maximal-monoton în spațiul Hilbert H și $(S(t))_{t\geq 0}$ semigrupul cu generatorul infinitezimal $(D(A), -A)$. Pentru orice $u^0 \in H$, fie $u(t) = S(t)u^0$. Există un spațiu Banach Y și un operator nemărginit $(D(B), B)$ în Y astfel încât*

1. *H este un subspațiu dens al lui Y.*
2. *$D(B) = H$ și $By = Ay$ pentru orice $y \in D(A)$.*
3. *$(D(B), B)$ este maximal-monoton în Y.*
4. *Dacă $(R(t))_{t\geq 0}$ este semigrupul generat de $(D(B), -B)$ în Y, atunci $S(t)u^0 = R(t)u^0$ pentru orice $t \geq 0$ și $u^0 \in H$.*
5. *u este derivabilă în Y și $\frac{d}{dt}u(t) + Bu(t) = 0$ în Y pentru orice $t \geq 0$.*

Demonstrație: Deoarece $(D(A), A)$ este maximal-monoton, rezultă că $J_1 = (A + I)^{-1}$ este un operator liniar și continuu în H. Pentru orice $x, y \in H$, definim

$$\langle x, y\rangle_{-1} = (J_1(x), J_1 y).$$

Evident, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}$ este un produs scalar în H. Fie Y închiderea lui H în raport cu produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}$. Rezultă că Y este un spațiu Hilbert. Fie $|| \cdot ||_{-1}$ norma corespunzătoare.

Să observăm acum că, pentru orice $x \in D(A)$,

$$||Ax||_{-1} = ||J_1(Ax)|| \leq ||x||_{-1} + ||x|| \leq 2||x||.$$

Prin urmare, A poate fi extins la un operator liniar și continuu $\tilde{A} \in L(H, Y)$. Definim $(D(B), B)$ ca operatorul nemărginit în Y dat de

$$D(B) = H,\ Bx = \tilde{A}x,\ \forall x \in H.$$

Să demonstrăm că $(D(B), B)$ este maximal-monoton în Y.

Pentru orice $x \in D(A)$, fie $y = J_1(x)$. Avem

$$\langle Bx, x\rangle_{-1} = (J_1(Bx), J_1(x)) = (J_1(Ax), J_1(x)) = (x, J_1(x)) - (J_1(x), J_1(x)) = (Ay + y, y) - (y, y) = (Ay, y).$$

Monotonitatea lui B rezultă acum din monotonitatea lui A și densitatea lui $D(A)$ în H.

Fie acum $f \in Y$. Există un șir $(f_n)_{n\geq 1} \subset H$ convergent la f în Y. Din maximalitatea lui A, există $x_n \in D(A)$ astfel încât $(A + I)x_n = f_n$ pentru orice $n \geq 1$. Obținem că $(x_n)_{n\geq 1}$ este un șir Cauchy în H. Prin urmare, converge la un $x \in H$. Trecând la limită în relația $(\tilde{A} + I)x_n = f_n$, obținem că $(\tilde{A} + I)x = f$, ceea ce demonstrează maximalitatea lui B.

Fie acum $(R(t))_{t\geq 0}$ semigrupul generat de $(D(B), -B)$ în Y. Fie $u^0 \in D(A)$ și u soluția (clasică) a

$$\begin{cases} u' + Au = 0, \text{ în } H \\ u(0) = u^0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Rezultă că $u(t) = S(t)u^0$, unde $(S(t))_{t\geq 0}$ este semigrupul generat de operatorul $(D(A), -A)$ în H.

Deoarece $Ax = Bx$ pentru orice $x \in D(A)$, rezultă că u verifică și

$$\begin{cases} u' + Bu = 0, \text{ în } Y \\ u(0) = u^0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Rezultă că $S(t)u^0 = u(t) = R(t)u^0$ pentru orice $t \geq 0$ și $u^0 \in D(A)$. Cazul general rezultă din densitatea lui $D(A)$ în H.

Fie acum $u^0 \in H$. Există un șir $(u_n^0)_{n\geq 1} \subset D(A)$ convergent la u^0 în H. După cum am văzut anterior, $u_n = S(t)u_n^0 = R(t)u_n^0$ este simultan soluție clasică a (4.4) și (4.5). Prin urmare,

$$\begin{cases} u_n' + Bu_n = 0, \text{ în } Y \\ u_n(0) = u_n^0 \end{cases} \tag{4.6}$$

Rezultatul urmează acum prin trecerea la limită în (4.6).

■

În cazul unui operator autoadjunct $(D(A), A)$, o soluție slabă devine mai regulată pentru $t > 0$. Mai precis, avem

Teoremă 4.3. *Dacă $(D(A), A)$ este autoadjunct și $u^0 \in H$, aplicația u dată de $u(t) = S(t)u^0$ satisface $u \in C([0,\infty), H) \cap C((0,\infty), D(A)) \cap C^1((0,\infty), H)$ și $u'(t) + Au(t) = 0$ pentru orice $t > 0$.*

Dacă operatorul $(D(A), A)$ este skew-adjunct, nu există regularitate suplimentară. În schimb, are loc conservarea normei. Mai precis, avem

Teoremă 4.4. *Dacă $(D(A), A)$ este skew-adjunct și $u^0 \in H$, aplicația u dată de $u(t) = S(t)u^0$ satisface $u \in C([0,\infty), H)$ și verifică $||u(t)|| = ||u^0||$ pentru orice $t \geq 0$.*

Capitolul 5

Dezvoltare Fourier

O modalitate diferită (dar echivalentă) de a defini soluțiile lui (4.1) se bazează pe dezvoltarea Fourier. Pentru a o folosi, să presupunem că operatorul $(D(A), A)$ are proprietatea că $D(A)$ este compact immers în H.

Prin $\sigma(A)$ notăm mulțimea rezolventă a operatorului A

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ există } (A - \lambda I)^{-1} : H \to H \text{ care este continuu în } H\}. \tag{5.1}$$

Prin $VP(A)$ notăm mulțimea valorilor proprii ale lui A,

$$VP(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ există } x \in H \setminus \{0\} \text{ astfel încât } Ax = \lambda x\} \tag{5.2}$$

iar cu E_λ notăm subspațiul propriu corespunzător unei valori proprii $\lambda \in VP(A)$,

$$E_\lambda = \{x \in D(A) : Ax = \lambda x\} = N(A - \lambda I). \tag{5.3}$$

Să reamintim mai întâi următoarea teoremă clasică despre spectrul unui operator compact (vezi [**?**], Teorema 2, p. 284):

Teoremă 5.1. *Fie X un spațiu Banach și $T : X \to X$ un operator liniar compact. Atunci*

1. *$\sigma(T)$ constă dintr-o mulțime cel mult numărabilă de valori complexe care nu are niciun punct de acumulare, cu posibila excepție a lui $\mu = 0$.*
2. *Dacă $\mu \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, atunci $\mu \in VP(T)$ și $dim(E_\mu) = k_\mu < \infty$.*

Următoarele rezultate oferă proprietăți ale spectrului unui operator autoadjunct:

Teoremă 5.2. *Fie X un spațiu Hilbert și $T : X \to X$ un operator liniar autoadjunct. Atunci*

1. *$VP(T) \subseteq \mathbb{R}$.*
2. *Dacă $\mu_1, \mu_2 \in VP(T)$ sunt două valori proprii diferite ale lui T, atunci subspațiile proprii corespunzătoare E_{μ_1} și E_{μ_2} sunt ortogonale în X.*

În sfârșit, următoarea teoremă oferă o descompunere spectrală a operatorilor autoadjuncți compacți.

Teoremă 5.3. *Fie X un spațiu Hilbert separabil și $T : X \to X$ un operator liniar compact autoadjunct. Dacă notăm $E_0 = N(T)$, atunci*

$$X = \bigoplus_{\mu \in VP(T) \cup \{0\}} E_\mu. \tag{5.4}$$

Putem demonstra acum teorema fundamentală privind descompunerea spectrală.

Teoremă 5.4. *Fie $(D(A), A)$ un operator maximal-monoton autoadjunct în spațiul Hilbert separabil infinit-dimensional H. Dacă $D(A)$ este compact immers în H, atunci*

1. *$VP(A)$ este o mulțime numărabilă de valori reale nenegative*

$$0 \leq \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < ... < \nu_n < ...$$

cu $\lim_{n\to\infty} \nu_n = \infty$.

2. *$dim(E_{\nu_j}) = k_j < \infty$ pentru orice $j \geq 0$.*

3. *Există o bază ortonormală a lui H formată din vectori proprii ai lui A.*

Demonstrație: Deoarece $(D(A), A)$ este maximal-monoton, rezultă că există $\lambda > 0$ astfel încât $J_\lambda = (A + \lambda I)^{-1}$ este un operator liniar și continuu de la H la H. Mai mult, deoarece $J_\lambda : H \to H$ ia valori în $D(A)$, care este compact immers în H, J_λ este un operator compact.

Pe de altă parte, J_λ este autoadjunct. Într-adevăr, pentru orice $u, v \in H$, dacă $w = J_\lambda(v)$, avem că

$$(J_\lambda(u), v) = (J_\lambda(u), (J_\lambda)^{-1}(w)) = (J_\lambda(u), (A + \lambda I)(w)) =$$
$$= (J_\lambda(u), Aw) + (J_\lambda(u), \lambda w) = ((A + \lambda I)J_\lambda(u), w) = (u, J_\lambda(v)).$$

Observăm că $0 \notin VP(J_\lambda)$. Avem că $\mu \in VP(J_\lambda)$ dacă și numai dacă $(\frac{1}{\mu} - \lambda) \in VP(A)$. Mai mult, subspațiile proprii ale operatorilor J_λ și A sunt aceleași. Rezultă că

$$VP(A) = \left\{ \nu \in \mathbb{R} \,:\, \frac{1}{\lambda + \nu} \in VP(J_\lambda) \right\} = \left\{ \nu \in \mathbb{R} \,:\, \nu = \frac{1}{\mu} - \lambda \text{ cu } \mu \in VP(J_\lambda) \right\}.$$

Fie $\nu_0 = 0$ și $E_{\nu_0} = N(A)$. Avem că

$$E_{\nu_0} = \{v \in H \,:\, Av = 0\} = \{v \in H \,:\, (A + \lambda I)v = \lambda v\} = \{v \in H \,:\, J_\lambda v = \frac{1}{\lambda} v\}.$$

Prin urmare, dacă $E_{\nu_0} \neq \{0\}$, atunci $\frac{1}{\lambda}$ este o valoare proprie a lui J_λ și E_{ν_0} este subspațiul propriu corespunzător. Deoarece $\frac{1}{\lambda} > 0$, din Teorema 5.1 rezultă că $\dim(E_{\nu_0}) = k_0 < \infty$. Fie $v_1^0, v_2^0, ..., v_{k_0}^0$ o bază ortonormală în E_{ν_0}.

Din Teoremele 5.1 și 5.2 rezultă că $VP(A) \setminus \{0\}$ este o mulțime numărabilă de numere reale pozitive $0 < \nu_1 < \nu_2 < ... < \nu_n < ...$ care tinde la infinit. Fiecărei valori proprii nenule ν_j îi corespunde un subspațiu propriu E_{ν_j} de dimensiune finită. Pentru fiecare $j \geq 1$, fie $v_1^j, ..., v_{k_j}^j$ o bază ortonormală a lui E_{λ_j}.

Subspațiile proprii $(E_{\nu_j})_{j \geq 0}$ sunt ortogonale. Din Teorema 5.3 rezultă că

$$v_1^0, ..., v_{k_0}^0,\ v_1^1, ..., v_{k_1}^1,\ v_1^2, ..., v_{k_2}^2,\ ...,\ v_1^n, ..., v_{k_n}^n,\ ...$$

formează o bază ortonormală a lui H, ceea ce încheie demonstrația.

Observăm că mulțimea $VP(A)$ trebuie să fie infinită, altfel dimensiunea lui H ar fi finită.

■

Observație 5.1. *În cele ce urmează, baza ortonormală de funcții proprii din Teorema 5.4 va fi notată simplu* $(v_n)_{n\geq 1}$.

Pentru a da dezvoltarea Fourier a soluțiilor lui (4.1), să considerăm dezvoltarea Fourier a datelor inițiale $u^0 \in H$:

$$u^0 = \sum_{n\geq 1} u_n^0 v_n \tag{5.5}$$

unde $u_n^0 = (u, v_n)$ pentru orice $n \geq 1$.

Teoremă 5.5. *Dacă* $u^0 \in H$ *este dată de (5.5), atunci soluția slabă a lui (4.1) este dată de*

$$u(t) = \sum_{n\geq 1} u_n^0 e^{-\lambda_n t} v_n. \tag{5.6}$$

Demonstrație: Fie $u^{0,k} = \sum_{n=1}^{k} u_n^0 v_n$. Evident, $u^{0,k} \in D(A)$ pentru orice $k \geq 1$.

Un calcul direct arată că $u^k(t) = \sum_{n=1}^{k} u_n^0 e^{-\lambda_n t} v_n$ este soluția clasică a lui (4.1) cu datele inițiale $u^{0,k}$. Prin urmare, $u^k(t) = S(t)u^{0,k}$. Acum, deoarece $(u^{0,k})_{k\geq 1}$ tinde la u^0 în H și $S(t)$ este un operator continuu, obținem că

$$u(t) = \lim_{k\to\infty} u^k(t) = \lim_{k\to\infty} S(t)u^{0,k} = S(t)(\lim_{k\to\infty} u^{0,k}) = S(t)u^0,$$

ceea ce încheie demonstrația.

■

Capitolul 6

Exemple

6.1 Operatorul Laplace în $L^2(\Omega)$

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă și mărginită și $H = L^2(\Omega)$. Definim următorul operator nemărginit în H:

$$\begin{aligned} &D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) \,:\, -\Delta u \in L^2(\Omega)\} \\ &Au = -\Delta u. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Teoremă 6.1. *Operatorul $(D(A), A)$ definit în (6.1) are următoarele proprietăți:*

1. *$(D(A), A)$ este maximal-monoton în H.*
2. *$(D(A), A)$ este autoadjunct în H.*
3. *$(D(A), -A)$ este generatorul infinitezimal al unui semigrup de contracții în H.*

Demonstrație:

1. Fie $u \in D(A)$. Avem
$$(Au, u) = \int_\Omega (-\Delta u)\overline{u} = \int_\Omega ||\nabla u||^2 \geq 0$$
și monotonitatea lui A rezultă. Observăm că ultima formulă (Green) are loc pentru orice $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ și, din densitatea lui $\mathcal{D}(\Omega)$ în $H_0^1(\Omega)$, pentru orice $u \in H_0^1(\Omega)$ fără ipoteze suplimentare de regularitate asupra lui Ω.

   Pentru a demonstra maximalitatea lui A, fie $f \in L^2(\Omega)$. Ecuația variațională
$$\int_\Omega \nabla u \nabla \overline{\varphi} + \int_\Omega u\overline{\varphi} = \int_\Omega f\overline{\varphi}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{6.2}$$
   are o soluție unică $u \in H_0^1(\Omega)$. Aceasta rezultă prin aplicarea binecunoscutei Teoreme Lax-Milgram.

   Mai mult, deoarece
$$\int_\Omega u(-\Delta\overline{\varphi}) = \int_\Omega (f-u)\overline{\varphi}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$
   și $f - u \in L^2(\Omega)$, rezultă că $-\Delta u \in L^2(\Omega)$, ceea ce demonstrează maximalitatea lui A.

2. Fie $D(A^*) = \{v \in L^2(\Omega) : \text{ există } c > 0 \text{ astfel încât } |(Au, v)| \leq c||u||, \forall u \in D(A)\}$ și $v \in D(A^*)$. Rezultă că aplicația

$$u \in D(A) \longrightarrow (Au, v) + (u, v) \in \mathbb{C}$$

poate fi extinsă prin continuitate la o aplicație liniară și continuă $p : L^2(\Omega) \to \mathbb{C}$ astfel încât $p(u) = (Au, v) + (u, v)$ pentru orice $u \in D(A)$.

Din teorema de reprezentare a lui Riesz, rezultă că există $\varphi \in L^2(\Omega)$ astfel încât

$$p(u) = \int_\Omega u\overline{\varphi}, \quad \forall u \in L^2(\Omega).$$

Fie acum $w \in D(A)$ soluția unică a ecuației eliptice

$$\begin{cases} -\Delta w + w = \varphi \text{ în } \Omega \\ w = 0 \text{ pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

Rezultă că, pentru orice $u \in D(A)$,

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)\overline{w} = \int_\Omega u(-\Delta\overline{w} + \overline{w}) = \int_\Omega u\overline{\varphi} = p(u) = (Au, v) + (u, v) = \int_\Omega (-\Delta u + u)\overline{v}.$$

Prin urmare, $v = w \in D(A)$. Rezultă că $D(A^*) \subseteq D(A)$.

Faptul că $D(A) \subseteq D(A^*)$ rezultă imediat, deoarece pentru orice $v \in D(A)$ avem

$$(Au, v) = \int_\Omega (-\Delta u)\overline{v} = \int u(-\Delta\overline{v}).$$

Rezultă că $D(A^*) = D(A)$ și, de asemenea, că $A^* = A$.

3. Este o consecință directă a lui 1.)

■

Observație 6.1. *Dacă Ω este o mulțime deschisă și mărginită cu frontieră de clasă C^2, atunci se poate arăta că $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.*

6.2 Operatorul Laplace în $H^{-1}(\Omega)$

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă și mărginită și $H = H^{-1}(\Omega)$.

Definim următorul operator mărginit de la $H_0^1(\Omega)$ la $H^{-1}(\Omega)$:

$$A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega), \quad < Au, \varphi >= \int_\Omega \nabla u \nabla\overline{\varphi}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{6.3}$$

Teoremă 6.2. *Operatorul A definit în (6.3) este un izomorfism izometric de la $H_0^1(\Omega)$ la $H^{-1}(\Omega)$.*

Demonstrație: Într-adevăr, deoarece $< Au, \varphi >= \int_\Omega \nabla u \nabla\overline{\varphi}$, pentru orice $\varphi \in H_0^1$, rezultă că

$$\| Au \|_{H^{-1}} = \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}=1} < Au, \varphi >= \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}=1} \left(\int_\Omega \nabla u \nabla\overline{\varphi} \right).$$

Dar

- $\sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}=1}\left(-\int_\Omega \nabla u\nabla\overline{\varphi}\right) \geq \int_\Omega \nabla u\nabla\frac{\overline{u}}{\|u\|_{H_0^1}} =\| u \|_{H_0^1}$.
- $\sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}=1}\left(-\int_\Omega \nabla u\nabla\overline{\varphi}\right) \leq \left(\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2\right)^{1/2} \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}=1}\left(\int_\Omega \mid \nabla\varphi \mid^2\right)^{1/2} =\| u \|_{H_0^1}$

Astfel

$$\| Au \|_{H^{-1}}= \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}=1}\left(\int_\Omega \nabla u\nabla\overline{\varphi}\right) =\| u \|_{H_0^1}$$

iar operatorul A este o izometrie de la $H_0^1(\Omega)$ la $H^{-1}(\Omega)$.

Liniaritatea și injectivitatea sunt evidente. Mai mult, operatorul A este surjectiv. Într-adevăr, din teorema de reprezentare a lui Riesz, pentru orice $f \in H^{-1}(\Omega)$ există $u_f \in H_0^1(\Omega)$ astfel încât

$$\int_\Omega \nabla u_f\nabla\overline{\varphi} =< f,\varphi >, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Prin urmare, operatorul A este, de asemenea, un izomorfism.

■

Observație 6.2. *Spațiul $H^{-1}(\Omega)$ poate fi văzut ca un spațiu Hilbert cu produsul scalar*

$$< u,v >= (A^{-1}u, A^{-1}v), \quad \forall u,v \in H^{-1}(\Omega). \tag{6.4}$$

Operatorul liniar și continuu A de la $H_0^1(\Omega)$ la $H^{-1}(\Omega)$ poate fi văzut ca un operator nemărginit în $H^{-1}(\Omega)$ definit de

$$\begin{aligned} &D(A) = H_0^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)\\ &(Au,\varphi) = \textstyle\int_\Omega \nabla u\nabla\overline{\varphi}, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Teoremă 6.3. *Operatorul $(D(A),A)$ definit în (6.5) are următoarele proprietăți:*

1. *$(D(A),A)$ este maximal-monoton în H.*
2. *$(D(A),A)$ este autoadjunct în H.*
3. *$(D(A),-A)$ este generatorul infinitezimal al unui semigrup de contracții în H.*

Demonstrație:

1. Fie $u \in D(A)$. Avem

$$< Au,u >= (u,A^{-1}u) = \int_\Omega (-\Delta u)\overline{u} = \int_\Omega ||\nabla u||^2 \geq 0$$

și monotonitatea lui A rezultă. Observăm că ultima formulă (Green) are loc pentru orice $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ și, din densitatea lui $\mathcal{D}(\Omega)$ în $H_0^1(\Omega)$, pentru orice $u \in H_0^1(\Omega)$ fără ipoteze suplimentare de regularitate asupra lui Ω.

Pentru a demonstra maximalitatea lui A, fie $f \in L^2(\Omega)$. Ecuația variațională

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\overline{\varphi} + \int_\Omega u\overline{\varphi} = \int_\Omega f\overline{\varphi}, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{6.6}$$

are o soluție unică $u \in H_0^1(\Omega)$. Aceasta rezultă prin aplicarea binecunoscutei Teoreme Lax-Milgram.

Mai mult, deoarece

$$\int_\Omega u(-\Delta\overline{\varphi}) = \int_\Omega (f-u)\overline{\varphi}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

și $f - u \in L^2(\Omega)$, rezultă că $-\Delta u \in L^2(\Omega)$, ceea ce demonstrează maximalitatea lui A.

2. Fie $D(A^*) = \{v \in L^2(\Omega) : \text{ există } c > 0 \text{ astfel încât } |(Au, v)| \leq c||u||, \forall u \in D(A)\}$ și $v \in D(A^*)$. Rezultă că aplicația

$$u \in D(A) \longrightarrow (Au, v) + (u, v) \in \mathbb{C}$$

poate fi extinsă prin continuitate la o aplicație liniară și continuă $p : L^2(\Omega) \to \mathbb{C}$ astfel încât $p(u) = (Au, v) + (u, v)$ pentru orice $u \in D(A)$.

Din teorema de reprezentare a lui Riesz, rezultă că există $\varphi \in L^2(\Omega)$ astfel încât

$$p(u) = \int_\Omega u\overline{\varphi}, \quad \forall u \in L^2(\Omega).$$

Fie acum $w \in D(A)$ soluția unică a ecuației eliptice

$$\begin{cases} -\Delta w + w = \varphi \text{ în } \Omega \\ w = 0 \text{ pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

Rezultă că, pentru orice $u \in D(A)$,

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)\overline{w} = \int_\Omega u(-\Delta\overline{w} + \overline{w}) = \int_\Omega u\overline{\varphi} = p(u) = (Au, v) + (u, v) = \int_\Omega (-\Delta u + u)\overline{v}.$$

Prin urmare, $v = w \in D(A)$. Rezultă că $D(A^*) \subseteq D(A)$.

Faptul că $D(A) \subseteq D(A^*)$ rezultă imediat, deoarece pentru orice $v \in D(A)$ avem

$$(Au, v) = \int_\Omega (-\Delta u)\overline{v} = \int u(-\Delta\overline{v}).$$

Rezultă că $D(A^*) = D(A)$ și, de asemenea, că $A^* = A$.

3. Este o consecință directă a lui 1.)

■

6.3 Operatorul undelor în $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă și mărginită cu frontieră regulată de clasă C^2 și $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Definim următorul operator nemărginit în H:

$$\begin{aligned} &D(A) = \{(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) : v \in H_0^1(\Omega),\ -\Delta u \in L^2(\Omega)\} \\ &A(u, v) = (-v, -\Delta u) \end{aligned} \tag{6.7}$$

unde $-\Delta$ este operatorul Laplace definit în $H_0^1(\Omega)$ în secțiunea 6.1.

Teoremă 6.4. *Operatorul $(D(A), A)$ definit în (6.7) are următoarele proprietăți:*

1. *$(D(A), A)$ este maximal-monoton în H.*
2. *$(D(A), A)$ este skew-adjunct în H.*
3. *$(D(A), -A)$ este generatorul infinitezimal al unui grup de izometrii în H.*

Demonstrație:

1. Este o consecință directă a proprietății similare a operatorului Laplace în $L^2(\Omega)$.
2. Este ușor de observat că
$$(A(u_1, v_1), (u_2, v_2)) = -((u_1, v_1), A(u_2, v_2))$$
iar proprietatea rezultă ca în cazul operatorului Laplace.
3. Este o consecință directă a lui 1. și 2.

■

Observație 6.3. *Dacă Ω este o mulțime deschisă și mărginită cu frontieră de clasă C^2, atunci se poate arăta că $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.*

6.4 Operatorul undelor în $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă și mărginită și $H = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Definim următorul operator mărginit de la $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ la $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$:

$$A : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega), \quad A(u, v) = (-v, -\Delta u) \tag{6.8}$$

unde $-\Delta$ este operatorul Laplace definit în $H^{-1}(\Omega)$ în secțiunea 6.2.

Teoremă 6.5. *Operatorul A definit în (6.8) este un izomorfism izometric de la $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ la $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.*

Demonstrație: Este o consecință directă a Teoremei 6.2.

■

Observație 6.4. *Spațiul $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ poate fi văzut ca un spațiu Hilbert cu produsul scalar*

$$< (u_1, v_1), (u_2, v_2) >= (A^{-1}(u_1, v_1), A^{-1}(u_2, v_2)), \quad \forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega). \tag{6.9}$$

Operatorul liniar și continuu A de la $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ la $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ poate fi văzut ca un operator nemărginit în $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ definit de

$$\begin{aligned} &D(A) = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \\ &A(u, v) = (-v, -\Delta u) \end{aligned} \tag{6.10}$$

unde $-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ a fost definit în secțiunea 6.2 prin $(-\Delta u, \varphi) = \int_\Omega \nabla u \nabla \overline{\varphi}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$. Avem următoarea

Teoremă 6.6. *Operatorul $(D(A), A)$ definit în (6.10) are următoarele proprietăți:*

1. *$(D(A), A)$ este maximal-monoton în H.*
2. *$(D(A), A)$ este skew-adjunct în H.*
3. *$(D(A), -A)$ este generatorul infinitezimal al unui grup de izometrii în H.*

6.5 Ecuația căldurii în $L^2(\Omega)$

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă și mărginită cu frontieră regulată de clasă C^2 și $T > 0$. Fiind dată $u^0 \in L^2(\Omega)$, considerăm următoarea ecuație

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{în } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u^0(x) & \text{în } \Omega. \end{cases} \tag{6.11}$$

(6.11) este o ecuație de evoluție de forma (4.1) în care operatorul $(D(A), A)$ este operatorul Laplace în $L^2(\Omega)$ definit în secțiunea 6.1. Următorul rezultat este o consecință a proprietăților de existență, unicitate și regularitate ale ecuațiilor generale de evoluție:

Teoremă 6.7. *Pentru orice $u^0 \in L^2(\Omega)$ există o unică soluție slabă $u \in C([0,T], L^2(\Omega))$ a lui (6.11), dată de $u(t) = S(t)u^0$, unde $(S(t))_{t\geq 0}$ este semigrupul generat de operatorul Laplace în $L^2(\Omega)$. Mai mult, dacă $u^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, atunci u devine o soluție clasică care aparține lui $C^1([0,T], L^2(\Omega)) \cap C([0,T], H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.*

6.6 Ecuația undelor în $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă și mărginită cu frontieră regulată de clasă C^2 și $T > 0$. Fiind date $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, considerăm următoarea ecuație

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{în } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(0,x) = u^0(x), u_t(0,x) = u^1(x) & \text{în } \Omega. \end{cases} \tag{6.12}$$

Ecuația (6.12) poate fi scrisă sub formă vectorială ca

$$\begin{cases} U_t + AU = 0 \\ U(0) = U^0 \end{cases} \tag{6.13}$$

unde $U(t) = (u(t), u_t(t))$ este starea și $U^0 = (u^0, u^1)$ sunt datele inițiale.

Operatorul A din (6.13) este operatorul nemărginit definit în secțiunea 6.3.

(6.13) este o ecuație de evoluție de forma (4.1). Următorul rezultat este o consecință a proprietăților de existență, unicitate și regularitate ale ecuațiilor generale de evoluție:

Teoremă 6.8. *Pentru orice date inițiale $U^0 = (u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ există o unică soluție slabă $U \in C([0,T], H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ a lui (6.13), dată de $U(t) = T(t)u^0$, unde $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ este grupul generat de operatorul definit în secțiunea 6.3 în $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Mai mult, dacă $U^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, atunci U devine o soluție clasică care aparține lui $C^1([0,T], H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)) \cap C([0,T], H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$.*

6.7 Ecuația undelor în $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulțime deschisă și mărginită cu frontieră regulată de clasă C^2 și $T > 0$. Fiind date $(u^0, u^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, considerăm următoarea ecuație

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{în } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(0,x) = u^0(x), u_t(0,x) = u^1(x) & \text{în } \Omega. \end{cases} \tag{6.14}$$

Ecuația (6.14) poate fi scrisă sub formă vectorială ca

$$\begin{cases} U_t + AU = 0 \\ U(0) = U^0 \end{cases} \tag{6.15}$$

unde $U(t) = (u(t), u_t(t))$ este starea și $U^0 = (u^0, u^1)$ sunt datele inițiale.

Operatorul A din (6.15) este operatorul nemărginit definit în secțiunea 6.4.

(6.15) este o ecuație de evoluție de forma (4.1). Următorul rezultat este o consecință a proprietăților de existență, unicitate și regularitate ale ecuațiilor generale de evoluție:

Teoremă 6.9. *Pentru orice date inițiale $U^0 = (u^0, u^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ există o unică soluție slabă $U \in C([0,T], L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))$ a lui (6.15), dată de $U(t) = T(t)u^0$, unde $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ este grupul generat de operatorul definit în secțiunea 6.3 în $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Mai mult, dacă $U^0 \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, atunci U devine o soluție clasică care aparține lui $C^1([0,T], L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)) \cap C([0,T], H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$.*