

UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA

Facultatea de matematică-informatică

Secțiile de matematică și matematică-informatică

Examenul de Analiză 1

Anul universitar 2003/2004

19 ianuarie 2004.

1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore. Punctajul este precizat la finele fiecărei chestiuni.

1. Demonstrați că ecuația $\sin x = x$ are o singură soluție reală, $x = 0$. [0.5p]
2. Enunțați și demonstrați formula lui Taylor. [1p]
3. Ce înseamnă că $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \infty$? i) în termeni de ε și δ ; ii) în termeni de vecinătăți; iii) în termeni de șiruri. [1p]
4. Reprezentați grafic funcția

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad [1p]$$

Explicați de ce admite primitive și calculați $\int f(x) dx$. [1p]

5. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 1/2 + \dots + 1/n}{\ln n}$$

și deduceți că $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) = \infty$. [1p + 0.5p]

Demonstrați că $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1000} < 10$. [1p]

6. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă.

i) Demonstrați că există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a). \quad [0.5p]$$

ii) Demonstrați că dacă $f \geq 0$ și $\int_a^b f(x) dx = 0$, atunci $f = 0$. [0.5p]

7. Motivați de ce suma unei serii de puteri este o funcție continuă pe intervalul de convergență. [1p]

23 ianuarie 2004

1 punct din oficiu. Timp de lucru, 3 ore. Punctajul este precizat la finele fiecărei chestiuni.

1. i) Folosiți metodele analizei matematice pentru a arăta că

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2 \text{ oricare ar fi } x \in [-1, 1]. \quad [0.5p]$$

- ii) Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$. [0.5p]

2. Enunțați și demonstrați teorema lui Rolle. [1p]

3. Reprezentați grafic funcția $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pe domeniul maxim de definiție. [1p]

4. Calculați

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

stabilind mai întâi o legătură între I_n și I_{n-2} . [1p]

5. Ce înseamnă că o funcție $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în punctul $a = 0$?
i) în termeni de ε și δ ; ii) în termeni de vecinătăți; iii) în termeni de șiruri. [1p]

6. Se cunoaște că $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$. Demonstrați că

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \quad [1p]$$

7. Stabiliți domeniul de convergență al seriei $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n \ln n}$. [1p]

8. Ce înseamnă că o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann? [0.25p]

Demonstrați că dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă Riemann și admite o primitivă F , atunci $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$. [0.75p]

9. Demonstrați că funcțiile monotone au cel mult discontinuități de prima speță și că acestea formează o mulțime cel mult numărabilă. [1p]

5 februarie 2004. Restanțe

1 punct din oficiu. Timp de lucru, 3 ore. Punctajul este precizat la finele fiecărei chestiuni.

1. Enunțați și demonstrați teorema valorii intermediare. [1p]

2. Deduceți din teorema lui Rolle că polinomul

$$P(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right]$$

are n rădăcini reale și distincte în intervalul $[-1, 1]$. [1p]

3. Reprezentați grafic funcția $f(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$ pe domeniul maxim de definiție. [1p]

4. Calculați valorile șirului de integrale

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx,$$

stabilind mai întâi o legătură între I_n și I_{n-2} . [1p]

5. Ce înseamnă că o funcție $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în punctul $a = 0$?
i) în termeni de ε și δ ; ii) în termeni de vecinătăți; iii) în termeni de șiruri.
[1p]

6. Fie șirul $(a_n)_n$ definit prin $a_0 = 1$ și formula de recurență

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right) \text{ pentru } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstrați că șirul este convergent și aflați limita sa. [1p]

7. Stabiliți domeniul de convergență al seriei $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n^2}$. [1p]
8. i) Ce înseamnă că o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann?
[0.25p]
- ii) Se dă funcția

$$f_a(x) = \begin{cases} x^{\sin x}, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ a, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

unde a este un parametru real. Demonstrați că funcția f_a este integrabilă Riemann pentru orice valoare a lui a , dar că admite primitive numai pentru $a = 1$. [0.50p + 0.25p]

9. Demonstrați că o funcție derivabilă f este crescătoare dacă și numai dacă $f' \geq 0$. [1p]

8 septembrie 2003. Restanțe

Subiectul A

1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore. Punctajul este precizat la finele fiecărei chestiuni.

1. Enunțați și demonstrați teorema lui Rolle. **[1p]**

Demonstrați că derivata polinomului $P(x) = (x+1)\dots(x+2003)$ are toate rădăcinile reale. **[0.5p]**

2. Reprezentați grafic funcția $f(x) = x^x$ pe domeniul maxim de definiție. **[1p]**

3. Calculați

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}. \quad \mathbf{[1p]}$$

4. Ce înseamnă că $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$? i) în termeni de ε și δ ; ii) în termeni de vecinătăți; iii) în termeni de șiruri. **[1p]**

5. Demonstrați că $e = 1 + 1/1! + 1/2! + \dots$. **[1p]**

6. Demonstrați că dacă o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$. **[0.5 p]**

7. Motivați de ce suma unei serii de puteri este o funcție continuă pe intervalul de convergență. **[1p]**

8. Se consideră șirul recurent $a_0 > 0$ și $a_{n+1} = a_n^{1/n}$ pentru $n \geq 0$. Determinați limita sa. **[1p]**

9. Demonstrați că funcțiile convexe $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 verifică relația $f'' \geq 0$. **[1p]**

8 septembrie 2003. Restanțe

Subiectul B

1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore. Punctajul este precizat la finele fiecărei chestiuni.

1. Enunțați și demonstrați teorema privind formula lui Taylor. **[1p]**

Dezvoltați polinomul $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ în serie de puteri în jurul punctului $x = 2$. **[0.5p]**

2. Reprezentați grafic funcția $f(x) = x/\sqrt[3]{x^2-1}$ pe domeniul maxim de definiție. **[1p]**
3. Calculați

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx. \quad \mathbf{[1p]}$$
4. Ce înseamnă că $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$? i) în termeni de ε și δ ; ii) în termeni de vecinătăți; iii) în termeni de șiruri. **[1p]**
5. Demonstrați că $(1 + 1/n)^n < e < (1 + 1/n)^{n+1}$ pentru orice număr natural $n \geq 1$. **[1p]**
6. Demonstrați că dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă și care admite o primitivă F , atunci $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. **[0.5 p]**
7. Stabiliți natura seriei $\sum \frac{1}{n^p \ln^q n}$ unde p și q sunt parametri reali. **[1p]**
8. Se consideră șirul recurent $a_0 > 0$ și $a_{n+1} = (1 + a_n)^{1/2}$ pentru $n \geq 0$. Determinați limita sa. **[1p]**
9. Demonstrați că funcțiile monotone au cel mult o mulțime numărabilă de discontinuități (și acelea numai de prima speță). **[1p]**