UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA
Facultatea de matematică-informatică
Secţiile de matematică şi matematică-informatică

# Examenul de Analiză 2

## Anul universitar 2003/2004

**19 ianuarie 2004.**

1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore. Punctajul este precizat la finele fiecărei chestiuni.

1. Demonstraţi că ecuaţia $\sin x = x$ are o singură soluţie reală, $x = 0$. $[0.5p]$
2. Enunţaţi şi demonstraţi formula lui Taylor. $[1p]$
3. Ce înseamnă că $\lim_{x\to 1-} f(x) = \infty$? i) în termeni de $\varepsilon$ şi $\delta$; ii) în termeni de vecinătăţi; iii) în termeni de şiruri. $[1p\,]$
4. Reprezentaţi grafic funcţia
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}},\ x \in \mathbb{R}.$$
Explicaţi de ce admite primitive şi calculaţi $\int f(x)\,dx$. $[1p + 1p]$
5. Calculaţi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/2 + ... + 1/n}{\ln n}$$
şi deduceţi că $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) = \infty$. $[1p + 0.5p]$
Demonstraţi că $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{1000} < 10$. $[1p]$
6. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.

   i) Demonstraţi că există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$. $[\,0.5p\,]$

   ii) Demonstrati că dacă $f \geq 0$ si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, atunci $f = 0$. $[\,0.5p\,]$
7. Motivaţi de ce suma unei serii de puteri este o funcţie continuă pe intervalul de convergenţă. $[\,1p\,]$

Secţiile de matematică şi matematică-informatică

# Analiză matematică 2

Restanţă, 26 mai 2004

1 punct din oficiu. Timp de lucru: 2 ore. Punctajul este precizat la finele fiecărei chestiuni.

1. a) Transformaţi ecuaţia

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

   luând pe $w$ ca nouă funcţie şi pe $u$ şi $v$ ca noi variabile, unde $u = x + y$, $v = y/x$, $w = z/x$.

   b) Rezolvaţi pe această bază ecuaţia de mai sus.

2. Calculaţi extremele funcţiei

$$f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z, \quad x, y, z > 0$$

   în prezenţa legăturii

$$x + y + z = \pi.$$

   Stabiliţi una dintre extreme folosind proprietatea de concavitate a funcţiei sin pe $[0, \pi]$.

3. Indicaţi formula pentru lungimea unui arc de curbă netedă. Calculaţi lungimea spiralei logaritmice $\rho = ae^{i\theta}$, unde $\theta \in [0, 2\pi]$ şi $a > 0$.

4. Fie funcţia $z = z(x, y)$ definită de sistemul de coordonate sferice

$$\begin{aligned} x &= \cos u \sin v \\ y &= \cos u \cos v \\ z &= \sin u. \end{aligned}$$

   Calculaţi $dz$.

5. Ce înseamnă că o funcţie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este uniform continuă? Cercetaţi dacă funcţia $\sin(x + y)$ este uniform continuă pe $\mathbb{R}^2$.

6. Ce înseamnă că o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ (unde $D$ este o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^2$) este diferenţiabilă?

   Demonstraţi că dacă f este diferenţiabilă atunci $f$ este continuă.

   Demonstraţi formula $d(f + g) = df + dg$.

7. Enunţaţi şi demonstraţi o condiţie suficientă pentru ca o funcţie diferenţiabilă să fie convexă.

8. Enunţaţi teorema de derivare sub semnul integral. Deduceţi cu ajutorul ei că dacă $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, este o funcţie continuă atunci

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

9. Presupunem că $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$este o funcţie continuă şi $f(a) > 0$. Demonstraţi că există un $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$f(x) \geq f(a)/2, \quad \text{pentru orice } x \text{ cu } ||x - a|| < \varepsilon.$$

**10 septembrie 2003. Restanţe**

# Subiectul A

1 punct din oficiu. Timp de lucru: 2 ore.

1. Să se transforme ecuaţia $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ făcând schimbarea de variabilă $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{-y}{x^2+y^2}$. [ **1 p** ]

2. Dintre toate triunghiurile de perimetru $2p$ dat, să se determine acela de arie maximă. [ **1 p** ]

3. Enunţaţi teorema funcţiilor implicite.

   Calculaţi extremele funcţiei $z = z(\, x,\, y\,)$ unde

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

   [ Indicaţie. Vezi interpretarea geometrică ] [ **0,5 p+1 p** ]

4. Calculaţi lungimea cardioidei

$$\begin{array}{l} x = a(\, 2\cos t - \cos 2t\,) \\ y = a(\, 2\sin t - \sin 2t\,) \end{array} \quad t \in [\, 0, 2\pi\,]. \quad [\,\mathbf{1\ p}\,]$$

5. Demonstraţi că dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă, ea are derivate parţiale. [ **1 p** ]

   Enunţaţi o reciprocă valabilă. [ **0,5 p** ]

6. Fie $K \subset \mathbb{R}^n$ o submulţime compactă. Demonstraţi că este închisă şi mărginită. [ **0,5 p+0,5 p** ]

7. Enunţaţi şi demonstraţi teorema contracţiei. [ **1 p** ]

8. Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă. Arătaţi că $f$ convexă dacă şi numai dacă

$$f(\,x\,) \geq f(\,a\,) + df(\,a\,)(\,x - a\,), \quad (\forall\,)\, x, y \in \mathbb{R}^n. \quad [\,\mathbf{1\ p}\,]$$

**10 septembrie 2004. Restanţe**

# Subiectul B

1 punct din oficiu. Fiecare din chestiunile de mai jos este de 1 punct. Timp de lucru, 2 ore.

1. Demonstraţi Teorema contracţiei.
2. Calculaţi $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ dacă
$$F(x,y) = \int_{x/y}^{xy} (x - yz)\, f(z)\, dz$$
unde $f = f(t)$ este o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$.
3. Calculaţi extremele funcţiei
$$u = \cos x \cos y \cos z, \quad x, y, z \in (0, \infty)$$
în prezenţa legăturii $x + y + z = 2\pi$.
4. Enunţaţi legătura dintre diferenţiabilitate şi existenţa derivatelor parţiale. Arătaţi că orice funcţie $f(x,y)$ care are derivate parţiale $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ mărginite într-un anume domeniu conex, este uniform continuă în acel domeniu.
5. Calculaţi lungimea arcului de curbă
$$\begin{cases} x = a\cos^4 t \\ y = a\sin^4 t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi/2]$$
unde $a > 0$ este un parametru.
6. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi diferenţiabilă, care admite un maxim global. Demonstraţi că $f$ este constantă.
7. Exprimaţi laplaceanul
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
în coordonate polare.
8. Enunţaţi Teorema funcţiilor implicite şi calculaţi $\frac{dx}{dz}$ şi $\frac{d^2 y}{dz^2}$ , dacă $x+y+z = 0$ şi $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.
9. Fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Demonstraţi că $F$ întoarce mulţimile deschise în mulţimi deschise şi duce mulţimile compacte în mulţimi compacte.