CARACTERUL ALGEBRIC AL INEGALITĂŢILOR LUI BLUNDON

CONSTANTIN P. NICULESCU

1. Introducere[1]**.** Fie R, r şi p respectiv raza cercului circumscris, a cercului înscris şi semiperimetrul unui triunghi. W. J. Blundon [2] a demonstrat că

$$(B)\qquad \begin{aligned} &2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \leq p^2 \leq \\ &\leq 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}. \end{aligned}$$

Precizarea cazului de egalitate se datorează lui Al. Lupaş [6]: Avem egalitate în inegalitatea din stânga dacă şi numai dacă triunghiul este fie echilateral, fie isoscel, cu baza mai mare ca laturile egale; avem egalitate în inegalitatea din dreapta dacă şi numai dacă triunghiul este fie echilateral, fie isoscel, cu baza mai mică decât laturile egale. Să notăm de asemenea comentariile foarte interesante ale domnului V. Cârtoaje [3] pe marginea inegalităţilor de mai sus.

Scopul notei de faţă este acela de a arăta că inegalităţile lui W. J. Blundon sunt consecinţa directă a unei inegalităţi algebrice implicând funcţiile simetrice elementare. Acest fapt nu este nou. Vezi cartea lui V. P. Soltan şi S. I. Meidman [12]. Abordarea noastră pune însă lucrurile într-o perspectivă mai generală şi creează astfel posibilitatea găsirii unor noi rezultate.

Vom baza demonstraţia inegalităţilor lui W. J. Blundon pe următoarea legătură dintre polinoamele cu rădăcini reale şi inegalităţile între funcţiile simetrice elementare:

Teorema A. *Fie $x,y,z\in\mathbb{C}$ astfel încât $x+y+z$, $xy+yz+zx$, $xyz\in\mathbb{R}$. Atunci $x,y,z\in\mathbb{R}$, dacă şi numai dacă*

$$\begin{aligned} &(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2+18(x+y+z)(xy+yz+zx)xyz \geq \\ &\geq 4(x+y+z)^3xyz+4(xy+yz+zx)^3+27x^2y^2z^2. \end{aligned}$$

În plus, inegalitatea este strictă, exceptând cazul când $x=y=z$.

Demonstraţia acestei teoreme face obiectul secţiunii următoare.

În orice triunghi au loc relaţiile

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2p \\ ab+bc+ca &= p^2+r^2+4Rr \\ abc &= 4Rrp \end{aligned}$$

astfel că pentru

$$x=p-a,\;\; y=p-b \text{ şi } z=p-c$$

[1]Publicat în *Gazeta matematică,* publicaţie de cultura matematică pentru tineret, **CIV** (1999), nr. 7-8, pp. 270-275.

avem

$$\begin{aligned} x+y+z &= p \\ xy+yz+zx &= r(4R+r) \\ xyz &= pr^2 \end{aligned}$$

şi inegalitatea din Teorema A se scrie în acest caz (după reducerea termenilor de semn contrar),

$$p^4 - 2\left(2R^2 + 10Rr - r^2\right)p^2 + 64rR^3 + 48r^2R^2 + 12r^3R + r^4 \leq 0,$$

egalitatea având loc numai pentru triunghiurile echilaterale. Punând această inegalitate sub forma

$$(*) \qquad \left(p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2\right)^2 \leq 4R\,(R-2r)^3$$

obţinem *inegalitatea lui Euler*,

$$R \geq 2r$$

şi faptul că aceasta devine egalitate numai în cazul triunghiurilor echilaterale.

Din $(*)$ rezultă imediat inegalităţile (B).

Teorema A conduce la inegalitatea $(*)$ şi în oricare din următoarelor cazuri:

$$x = \frac{1}{a}\,,\ y = \frac{1}{b},\ \ z = \frac{1}{c}\,; \quad x = tg\,\frac{A}{2}\,,\ y = tg\,\frac{B}{2},\ \ z = tg\,\frac{C}{2}\,;$$

$$x = r_a\,,\ y = r_b,\ \ z = r_c\,.$$

V. P. Soltan şi S. I. Meidman [12] fac o observaţie importantă, anume că *inegalitatea $(*)$ reprezintă condiţia necesară şi suficientă pentru ca trei numere pozitive R, r şi p să reprezinte respectiv raza cercului circumscris, a cercului înscris şi semiperimetrul unui triunghi.*

Inegalităţile între funcţiile simetrice elementare (dintre care cea mai cunoscută este inegalitatea mediilor) sunt pe larg tratate în numeroase cărţi. Amintim în primul rând pe cele ale lui G. Hardy, J. E. Littlewood şi G. Polya [5] şi A. W. Marshall şi I. Olkin [8]. Trebuie să menţionăm însă că nota de faţă are la bază ideea iniţiată de Newton [9] şi discipolul său Maclaurin [7] (idee definitivată ulterior de J. J. Sylvester [13]), potrivit căreia condiţia de realitate a rădăcinilor ecuaţiilor algebrice este exprimabilă în termeni de inegalităţi construite cu coeficienţii acestora, deci în termeni de funcţiile simetrice elementare. Vezi Teorema B de mai jos. O abordare completă a acestei chestiuni va apare în [10].

2. Demonstraţia Teoremei A. Binecunoscutul rezultat privind discuţia naturii rădăcinilor trinomului de gradul doi cu coeficienţi reali în funcţie de semnul discriminantului admite următorul analog pentru ecuaţiile algebrice de gradul trei:

Lema 1. *Fie $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuaţiei*

$$(E) \qquad x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_3 = 0$$

să fie numere reale este îndeplinirea inegalităţii

$$D = (x_1 - x_2)^2\,(x_2 - x_3)^2\,(x_3 - x_1)^2 \geq 0.$$

Cantitatea D care apare în enunţul Lemei 1 poartă numele de *discriminant* (al polinomului $x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_3$ aflat în atenţie). Legătura cu Teorema A este imediată, observând că

$$\begin{aligned} D &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}\right) = \\ &= \det\begin{pmatrix} 3 & \sum x_k & \sum x_k^2 \\ \sum x_k & \sum x_k^2 & \sum x_k^3 \\ \sum x_k^2 & \sum x_k^3 & \sum x_k^4 \end{pmatrix} = \\ &= 18a_1a_2a_3 + a_1^2a_2^2 - 4a_1^3a_3 - 4a_2^3 - 27a_3^2 \end{aligned}$$

ultima egalitate fiind motivată de relaţiile lui Viète.

Demonstraţia algebrică a Lemei 1. Dacă rădăcinile x_1, x_2, x_3 sunt reale, atunci este evident că $D \geq 0$; în plus, $D = 0$ dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = x_3$.

Dacă ecuaţia în atenţie nu are toate rădăcinile reale, atunci în mod necesar două din ele ar fi complex conjugate, iar a treia ar fi reală, spre exemplu,

$$x_1 = a + bi,\ \ x_2 = a - bi,\ \ x_3 = c$$

unde $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ şi $b \neq 0$. În acest caz,

$$D = -b^2[(a-c)^2 + b^2] < 0.$$

Demonstraţia analitică a Lemei 1. Ecuaţia (E) are toate rădăcinile reale dacă şi numai dacă ecuaţia redusă,

$$y^3 - py + q = 0,$$

care se obţine utilizând schimbarea de variabilă $x = y + a_1/3$,are toate rădăcinile reale; să notăm că

$$p = \frac{1}{3}a_1^2 - a_2 \quad \text{şi} \quad q = \frac{1}{3}\,a_1a_2 - a_3 - \frac{2}{27}a_1^3\,.$$

Or, tehnica şirului lui Rolle ne arată că ecuaţia redusă are toate rădăcinile reale dacă şi numai dacă

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Înlocuind expresiile lui p şi q găsim condiţia $D \geq 0$ în forma

$$(NN) \qquad 18a_1a_2a_3 + a_1^2a_2^2 - 4a_1^3a_3 - 4a_2^3 - 27a_3^2 \geq 0. \quad \blacksquare$$

3. Inegalităţile lui Newton. O binecunoscută consecinţă a teoremei lui Rolle (datorată lui C. Maclaurin [7] şi menţionată şi în manualele şcolare de analiză matematică) afirmă că dacă un polinom are toate rădăcinile reale, atunci derivata lui are de asemenea toate rădăcinile reale.

Dacă polinomul cu coeficienţi reali $P(x) = x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_3$ are toate rădăcinile reale, atunci şi derivata sa $3x^2 - 2a_1x + a_2$ are această proprietate. Prin urmare $a_1^2 \geq 3a_2$.

Procedând asemănător asupra numărătorului lui $P(1/x)$, ajungem la inegalitatea $a_2^2 \geq 3a_1a_3$. Inegalităţile

$$(N) \qquad a_1^2 \geq 3a_2 \quad \text{şi} \quad a_2^2 \geq 3a_1a_3$$

au fost remarcate pentru prima dată de Newton [8] şi îi poartă numele. Maclaurin [7], căruia i se datorează raţionamentul de mai sus, a observat că ele implică

$$(a_1/3)^3 \geq a_3$$

echivalent,

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^3 \geq x_1x_2x_3 \quad \text{pentru orice} \quad x_1,\, x_2,\, x_3 \in \mathbb{R},$$

fapt care reprezintă *inegalitatea mediilor* pentru familiile formate din 3 numere reale. Urmând ideea dezvoltată mai sus, el a demonstrat inegalitatea mediilor în toată generalitatea, tratând şi cazul de egalitate. Un secol mai târziu, A.-L. Cauchy a indicat binecunoscuta sa demonstraţie inductivă a inegalităţii mediilor, care este astăzi reprodusă în multe cărţi. Vezi, de exemplu, [5].

În acord cu discuţia de mai sus, *inegalitatea* (NN) *implică inegalităţile lui Newton* (N). Pentru un argument direct, să observăm că inegalitatea (NN) se mai scrie

$$4(a_2^2-3a_1a_3)(a_1^2-3a_2) \geq (a_1a_2-9a_3)^2$$

şi deci $a_2^2-3a_1a_3$ şi $a_1^2-3a_2$ sunt simultan ≥ 0 sau ≤ 0. Or, $a_1^2-3a_2 \geq 0$ este echivalentă cu

$$(x_1+x_2+x_3)^2 \geq 3\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right),$$

adică cu $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2 \geq 0$, ceea ce evident are loc pentru orice $x_1,\, x_2,\, x_3 \in \mathbb{R}$. Deci şi $a_2^2-3a_1a_3 \geq 0$.

Inegalitatea $a_2^2-3a_1a_3 \geq 0$ conduce (pentru $x_1 = p-a,\ y = p-b$ şi $z = p-c$) la o binecunoscută inegalitate în triunghi:

$$a^2+b^2+c^2 \geq (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4\sqrt{3}\,S.$$

Acest fapt este detaliat în [1] şi [4], împreună cu o suită de aplicaţii.

Exemple[2]**.** În general (N) nu implică (NN). Un prim exemplu ni-l oferă cazul ecuaţiei

$$x^3-8.9x^2+26x-24=0,$$

caz în care $a_1 = 8.9$, $a_2 = 26$, $a_3 = 24$. Această ecuaţie are (aproximativ) rădăcinile

$$x_1 = 1.\,8587, \quad x_2 = 3.\,5207-0.\,71933i, \quad x_3 = 3.\,5207+0.\,71933i.$$

Interesant de observat că ea reprezintă o "mică" perturbare a unei ecuaţii "foarte cuminţi",

$$x^3-9x^2+26x-24 = (x-2)(x-3)(x-4) = 0.$$

Inegalităţile lui Newton funcţionează deoarece

$$a_1^2-3a_2 = (8.9)^2-3\cdot 26 = 1.\,21 \quad \text{şi} \quad a_2^2-3a_1a_3 = (26)^2-3\cdot 8.9\cdot 24 = 35.\,2$$

dar inegalitatea (NN) nu este verificată.

Al doilea exemplu este legat de ecuaţia

$$x^3-2px^2+(p^2+4Rr+r^2)x-4pRr = 0,$$

considerată în Introducere. După cum este relatat în [14], pag. 103, inegalităţile lui Newton conduc în acest caz la

$$9r(4R+r) \leq 3p^2 \leq (4R+r)^2$$

[2]Peste tot, în scrierea zecimală a numerelor reale vom folosi punctul în locul tradiţionalei virgule.

relaţii mai slabe ca inegalităţile lui Blundon, observate de G. Colombier şi T. Doucet în 1872.

4. Cazul ecuaţiilor de ordin superior. Putem introduce noţiunea de discriminant şi pentru polinoamele de grad superior. Anume, dat fiind polinomul cu coeficienţi reali $P(x) = x^n - a_1x^{n-1} + ... + (-1)^n a_n$, ale cărui rădăcini sunt $x_1, ..., x_n$, *discriminantul* său se defineşte prin formula

$$D(1, a_1, ..., a_n) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2 .$$

Pentru n$\geq$ 4, evidenţierea naturii rădăcinilor nu mai este posibilă utilizând doar semnul discriminantului. Vezi cazul unei ecuaţii de gradul 4 cu două perechi de rădăcini complexe conjugate. Locul lui îl iau *familiile discriminante*. În acest mod, generalizarea Teoremei A o constituie următorul rezultat demonstrat de J. J. Sylvester [13] în 1853:

Teorema B. *Pentru fiecare număr natural $n \geq 2$ există un set de cel mult $n-1$ polinoame cu coeficienţi întregi*

$$R_1(x_1, ..., x_n),\ ...\ ,\ R_{k(n)}(x_1, ..., x_n)$$

cu proprietatea că polinomele cu coeficienţi reali,

$$P(x) = x^n - a_1x^{n-1} + ... + (-1)^n a_n,$$

care au rădăcinile reale sunt precis acelea pentru care

$$R_1(a_1, ..., a_n) \geq 0,\ ...\ ,\ R_{k(n)}(a_1, ..., a_n) \geq 0 .$$

Procedeul algoritmic evidenţiat de demonstraţia acestui rezultat permite să alegem ca polinom $R_1(x_1, ..., x_n)$ tocmai discriminantul de ordinul n. Din păcate, inegalităţile care se obţin implică foarte mulţi termeni. De exemplu, discriminantul de ordinul 8 are nu mai puţin de 26095 termeni! Vezi [11].

O variantă evidentă a Teoremei B este aceea când se cere ca rădăcinile să fie nu numai reale ci chiar nenegative. Atunci, pe lângă inegalităţile indicate, mai trebuie verificate şi următoarele:

$$a_1 \geq 0,\ ...\ ,\ a_n \geq 0.$$

Inegalităţile (implicând funcţiile simetrice elementare) pe care le evidenţiază Teorema B reprezintă un uriaş potenţial, pe care cititorii Gazetei matematice sunt îndemnaţi să-l pună în valoare.

Bibliografie

[1] M. Becheanu, *Algebraic methods in triangle geometry*, Romanian Mathematics Magazine **1** (1999), sub tipar.

[2] W. J. Blundon, *Inequalities associated with the triangle,* Canad. Math. Bull. **8** (1965), 615-626.

[3] V. Cârtoaje, *Extensions of Blundon-type inequalities*, Romanian Mathematics Magazine **1** (1999), sub tipar.

[4] A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, 1998.

[5] G. Hardy, J. E. Littewood and G. Polya, *Inequalities,* Cambridge Mathematical Library, 2nd ed., 1952.

[6] Al. Lupaş, *Asupra unor inegalităţi geometrice*, Revista de matematică a elevilor din Timişoara, **XV** (1984), no. 1, pp. 21-23.

[7] C. Maclaurin, *A second letter to Martin Folkes, Esq.; concerning the roots of*

equations, with the demonstration of other rules in algebra, Phil. Transactions **36** (1729), 59-96.

[8] A. W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*, Academic Press, 1979.

[9] I. Newton, *Arithmetica universalis*: *sive de compositione et resolutione arithmetica liber,* 1707.

[10] C. P. Niculescu, *A New Look at Newton's Inequalities,* sub tipar.

[11] T. Sasaki, Y. Kanada and W.Watanabe, *Calculation of discriminants of higher degree equations*, Tokyo J. Math. **4** (1981), 493-503.

[12] V. P. Soltan şi S. I. Meidman, *Identităţi şi inegalităţi în triunghi*, Ed. Ştiinţa, Chişinău, 1982 (În lb. rusă)

[13] J. Sylvester, *On a theory of syzgetic relations of two rational integral functions comprising an appplication to the theory of Sturm's functions*, Phyl. Trans. of the Royal Soc. of London **CXLIII** (1853), 407-548.

[14] V. Gh. Vodă, *Vraja geometriei demodate,* Ed. Albatros, Bucureşti, 1983.

Universitatea din Craiova, Str. Al. I. Cuza 13, Craiova 1100
E-mail address: tempus@oltenia.ro