

UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA

Str. A. I. Cuza 13, Craiova 200585 Tel. 004. 051. 413. 728 Fax: 004. 051. 412. 673

Sinteza

lucrărilor efectuate în cadrul proiectului de cercetare

**Probleme de analiză convexă, analiză numerică și
control în studiul sistemelor fizice complexe**

Comisia 1

Nr. Contract: 522/21.01.2009

Cod CNCIS: ID_420/2008

Etapa: 2009

Valoarea prevăzută: 98.148,80 lei

Valoarea realizată: 95.498,31 lei

Director de proiect: Prof. dr. Constantin P. Niculescu

2009

1. Date de ordin general

1.1 Colectivul care a efectuat lucrările de cercetare:

Prof. dr. Constantin P. Niculescu, director de proiect
Prof. dr. Sorin Daniel Micu
Lector. dr. Andaluzia Matei
Asistent dr. Ionel Roventa
Doctorand Corina-Flavia Minuța (din 1 dec. 2009)

1.2 Cheltuieli efectuate

1. CHELTUIELI DE PERSONAL	52.519,95 lei
2. REGIE	12.456,31 lei
3. Mobilități	24.176,05 lei
4. Cheltuieli de logistică	6.346,00 lei

TOTAL DEVIZ POSTCALCULAT: 95.498, 31 lei

1.3 Obiectivele Proiectului

Obiectivele strategice

- 1) Efectuarea de cercetări originale in domeniul analizei convexe, analizei numerice și teoriei controlului.
- 2) Largirea cooperării internaționale.
- 3) Cresterea vizibilității cercetării românești. Difuzarea experienței românești în literatura internațională.
- 4) Dezvoltarea resursei umane înalt calificate.

Obiectivele științifice

A. Studiul controlabilității unor ecuații care modelează vibrațiile unor structuri flexibile în prezența unor obstacole care limitează mișcarea acestora, fie în interiorul domeniului, fie pe frontiera lui. Acest obiectiv are un caracter interdisciplinar, mecanica, teoria controlului și analiza numerică având contribuții egale.

B. Utilizarea de *formulari variaționale mixte* pentru studiul *existenței, unicității și stabilității soluțiilor slabe* ale unor probleme viscoelastice quasistatice de contact. Un avantaj al acestei abordări este acela că oferă posibilitatea scrierii unor *algoritmi eficienți* de aproximare.

C. *Extensia teoriei lui Choquet* la cazul spațiilor ce au curbura globală nepozitivă.

Mentionam ca extensia teoremei Krein-Milman in contextul spatiilor geodezice a fost recent demonstrata de C. P. Niculescu, *The Krein-Milman Theorem in Global NPC Spaces*, Bull. Soc. Sci. Math. Roum. **50** (98), 2007, no. 4, 343-346.

D. Extensia la spatiile cu geometrie curba si a altor rezultate clasice precum teorema de punct fix a lui Brouwer, In cazul spatiilor de curbura nula, este binecunoscuta legatura dintre teorema lui Brouwer, inegalitatea lui Ky Fan si teorema de echilibru Nash (din matematica financiara). Ne propunem deci sa analizam aceasta legatura si in noul context.

2. Evidențierea aspectelor de creație

2.1 Articole

Rezultatele originale ale activității de cercetare desfășurate în cadrul grantului se prezintă sub forma unei suite de lucrări științifice publicate în reviste științifice cu o bună reputație. Lista lor este următoarea:

Articole ISI

1. **C. P. Niculescu**, *The Hermite-Hadamard inequality for convex functions on a global NPC space*, J. Math. Anal. Appl. **356** (2009), no. 1, 295–301. doi:10.1016/j.jmaa.2009.03.007
Impact factor: 1.046
2. **C. P. Niculescu** and **Ionel Roventă**, *Fan's inequality in geodesic spaces*, Appl. Math. Letters **22** (2009), 1529-1533. doi:10.1016/j.aml.2009.03.020
Impact factor: 0.948
3. **C. P. Niculescu** and **Ionel Roventă**, *Schauder Fixed Point Theorem in Spaces with Global Nonpositive Curvature*, Fixed Point Theory and Applications, vol. 2009, Article ID 906727, 8 pages, 2009. doi:10.1155/2009/906727.
Impact factor: 0.728
4. M. Boureanu and **A. Matei**, *Weak solutions for antiplane models involving elastic materials with degeneracies*, accepted, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), 2009, doi 10.1007/s00033-009-0008-0.
Impact factor: 1.139
5. **Micu Sorin** and Luz de Teresa, *A Spectral Study of the Boundary Controllability of the Linear 2-D Wave Equation in a Rectangle*, Asymptotic Analysis, 2009, doi 10.3233/ASY-2009-0963.
Impact factor 0.662

Articole BDI

1. **A. Matei**, *A variational approach for an electro-elastic unilateral contact problem*, Mathematical Modelling and Analysis, **14** (3), 323-334, 2009.
ISI Extended List. Impact factor: 0

2. R. Ciurcea and A. Matei, *Solvability of a mixed variational problem*, Ann. Univ. Craiova, Mathematics and Informatics Series **36** (2009), 105-111.

Notă: Pentru 2009 au fost prevăzute patru articole ISI (s-au realizat cinci) și unul BDI (s-au realizat două).

2.2 Descrierea sintetică a rezultatelor

Lucrările elaborate în cadrul acestui proiect acoperă o largă diversitate de subiecte, multe dintre ele având un caracter interdisciplinar. Ele privesc:

- Extinderea unor rezultate clasice din analiza convexă la contextul spațiilor cu geometrie curbă. Este vorba de teorema de punct fix a lui Schauder, inegalitatea Hermite-Hadamard, inegalitatea lui Ky Fan (din matematica economică), teorema de echilibru a lui Nash etc.
- Aplicații ale inegalităților variaționale la studiul unor probleme din matematica mediilor de contact;
- Studiul proprietăților de controlabilitate ale ecuației undelor bidimensionale.

Detaliem în continuare conținutul lucrărilor publicate:

C. P. Niculescu, *The Hermite-Hadamard inequality for convex functions on a global NPC space*, J. Math. Anal. Appl. **356** (2009), no. 1, 295–301.

Demonstrăm o extensie la cazul spațiilor metrice compacte de tip NPC a Teoremei lui Choquet de existență a măsurilor majorante, concentrate pe multimea punctelor extremale. Impreună cu rezultatul lui Sturm privind extensia inegalității lui Jensen la cadrul aceluiași spații obținem astfel o generalizare a inegalității Hermite-Hadamard inequality de la cazul funcțiilor convexe definite pe intervale compacte la cazul funcțiilor definite pe compacti convecși din spații metrice de tip NPC (spații ce au curbura globală nepozitivă). Vezi:

K.T. Sturm, *Probability measures on metric spaces of nonpositive curvature*, in: Pascal Auscher, et al. (Eds.), Heat Kernels and Analysis on Manifolds, Graphs, and Metric Spaces, Lecture Notes from a Quarter Program on Heat Kernels, Random Walks, and Analysis on Manifolds and Graphs, April 16–July 13, 2002, Paris, France, in: Contemp. Math., vol. 338, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, pp. 357–390.

Tehnic, un *spațiu global NPC* este un spațiu metric complet $M = (M, d)$ în care funcționează următorul analog al teoremei medianei: pentru orice pereche de puncte $x_0, x_1 \in M$ există un punct $y \in M$ astfel că pentru orice z din M avem relația

$$d^2(z, y) \leq \frac{1}{2} d^2(z, x_0) + \frac{1}{2} d^2(z, x_1) - \frac{1}{4} d^2(x_0, x_1).$$

Intr-un spațiu global NPC orice pereche de puncte pair of points $x_0, x_1 \in M$ se poate uni printr-o geodezică (adică printr-o curbă rectificabilă $\gamma: [0; 1] \rightarrow M$ astfel că lungimea lui $\gamma|_{[s;t]}$ este $d(\gamma(s); \gamma(t))$ pentru orice $0 \leq s \leq t \leq 1$). În plus, această geodezică este unică. Punctul y care apare în definiția spațiilor global NPC poartă numele de mijloc al segmentului geodezic de capete x_0 și x_1 .

Orice spațiu Hilbert este un spațiu global NPC space. În acest caz geodezicele sunt segmentele liniare. Varietățile Riemanniene $(M; g)$ sunt spații global NPC space dacă și numai sunt complete, simplu conexe și au curbura secțională nepozitivă. În afara acestor spații, alte exemple sunt construcțiile Bruhat-Tits (în particular, arborii). Vezi: W. Ballmann, Lectures on spaces with nonpositive curvature, DMV Seminar Band 25, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.

Rezultatul central din articolul nostru extinde un rezultat clasic al lui Choquet:

Teorema 4. Fie μ o măsură de probabilitate pe mulțimea compactă și convexă K a unui spațiu global NPC M . Atunci există o măsură de probabilitate n pe K care verifică următoarele două condiții:

- i) $m \ll n$;
- ii) Mulțimea $Ext K$, a punctelor extremale ale lui K este Boreliană set și n este concentrată pe $Ext K$ (adică $n(K \setminus ExtK) = 0$).

Prin urmare, notând cu x_m baricentrul lui m , pentru orice funcție continuă și convexă $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ avem

$$f(x_m) \leq \int_K f dm \leq \int_{ExtK} f dn,$$

fapt care extinde inegalitatea Hermite-Hadamard.

C. P. Niculescu and Ionel Roventă, *Fan's inequality in geodesic spaces*, Appl. Math. Letters **22** (2009), 1529-1533.

În această lucrare extindem inegalitatea lui Ky Fan la contextul spațiilor global NPC. Drept consecință obținem existența echilibrului Nash în condiții foarte largi. Rezultatul central este:

Teorema 1. Fie C o submulțime compactă și convexă a unui spațiu global NPC.

- i) Dacă $f: C \times C \rightarrow \mathbf{R}_+$ este quasi-concavă în prima variabilă și inferior semicontinuă în a doua variabilă, atunci

$$\min_{y \in C} \sup_{x \in C} f(x, y) \leq \sup_{z \in C} f(z, z).$$

- ii) Dacă $p \in \mathbf{R}$ și $f: C \times C \rightarrow \mathbf{R}_+$ este M_p -concavă și inferior semicontinuă în fiecare variabilă, atunci

$$\min_{y \in C} \sup_{x \in C} M_p^p(f(x, y), f(y, x); 1-t, t) \leq \sup_{z \in C} f^p(z, z)$$

pentru orice $t \in (0,1)$.

Amintim că media M_p ponderată se definește pentru perechile de numere pozitive x, y prin formula

$$M_p(x, y; 1-I, I) = \begin{cases} ((1-I)x^p + I y^p)^{1/p} & \text{daca } p \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ x^{1-I} y^I & \text{daca } p = 0 \\ \min\{x, y\} & \text{daca } p = -\infty \\ \max\{x, y\} & \text{daca } p = \infty. \end{cases}$$

unde $I \in [0,1]$. Dacă p este un număr impar, atunci putem defini M_p și pentru perechile de numere reale.

Constantin P. Niculescu and Ionel Roventța: *Schauder Fixed Point Theorem in Spaces with Global Nonpositive Curvature*, Fixed Point Theory and Applications, vol. 2009, Article ID 906727, 8 pages, 2009.

Bazat pe faptul că într-un spațiu global NPC orice submulțime compactă și convexă K are proprietatea de punct, se demonstrează următorul rezultat:

Teorema 1.3. *Să presupunem că C este o submulțime convexă și închisă a unui spațiu global NPC cu proprietatea că anvelopa convexă și închisă a oricărei mulțimi finite este compactă. Atunci orice aplicație continuă $T : C \rightarrow C$ a cărei imagine $T(C)$ este relativ compactă are un punct fix.*

Folosind acest rezultat se extinde și principiul Leray-Schauder și se demonstrează o teoremă de punct fix pentru aplicațiile acționând pe \mathbf{R} -arbori.

Micu Sorin and Luz de Teresa *A Spectral Study of the Boundary Controllability of the Linear 2-D Wave Equation in a Rectangle*, Asymptotic Analysis, 2009. doi 10.3233/ASY-2009-0963.

Articolul studiază proprietățile de controlabilitate a ecuației undelor liniare bidimensionale, având ca domeniu un dreptunghi $\Omega = (0,a) \times (0,b)$. Considerăm două tipuri de acțiune; pe o latură, sau pe două laturi adiacente. Analiza noastră este bazată pe dezvoltări Fourier și construirea explicită a unor șiruri biortogonale. Această metodă ne permite să măsurăm magnitudinea controalelor necesare pentru fiecare frecvență. În ambele cazuri analizate oferim o caracterizare în termeni Fourier a spațiului de date inițiale controlabile și construim un control particular pentru ele. Obiectivul nostru este dublu:

- a) Să dăm o mai bună descriere a spațiului de date inițiale care pot fi controlate de pe o latură;
- b) Să reobținem spațiul de date inițiale controlabile de pe două laturi adiacente.

Pentru prima problemă îmbunătățim un rezultat anterior ținut de S. Jaffard și S. Micu (“*Estimates of the constants in generalized Ingham's inequality and applications to the control of the wave equation*”, *Asymptotic Analysis*, 28 (2001), pp.181-214) demonstrând controlabilitatea unui spațiu mai mare de date inițiale. Mai mult, dăm estimări ale normei controalelor și arătăm care date inițiale sunt mai dificil de controlat de pe o latură a frontierei. Spațiul de date controlabile este caracterizat de comportamentul asimptotic al coeficienților Fourier ai elementelor sale și cuprinde funcții analitice într-una din variabile. De asemenea, aratam ca spațiul de date controlabil este cu atât mai mare cu cât timpul de control este mai mare.

Pentru problema a doua obținem spațiu optim de date controlabile $L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ dar timpul de control este mai mare decât cel cunoscut ca fiind optim. Deși pare un rezultat mai slab, totuși el relevă cel puțin două lucruri interesante: cum controalele de pe fiecare latură pot fi folosite alternativ și cum normele lor se schimbă, depinzând de rangul de frecvențe pe care dorim să-l controlăm. Astfel, pentru o anumită clasă de frecvențe putem folosi controale doar pe una din laturi iar pentru celelalte frecvențe controale pe cealaltă latură, ambele tipuri de controale rămânând mărginite.

M. Boureau and **A. Matei**, *Weak solutions for antiplane models involving elastic materials with degeneracies*, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 2009, doi 10.1007/s00033-009-0008-0.

Articolul este destinat studiului deformației antiplane a unui corp deformabil în contact cu frecare cu o fundație rigidă, admitând ipoteza micilor deformații. Modelele antiplane sunt folosite în inginerie pentru a descrie funcționarea unor mecanisme și în geofizică în studiul plăcilor tectonice. Corpul este presupus neomogen, elastic neliniar și poate avea puncte degenerate. Prezența punctelor degenerate conduce la pierderea elipticității de către operatorul elastic, aceasta îngreunând analiza problemei, problema mecanică propusă fiind abordată variațional prin intermediul spațiilor Sobolev cu pondere. Mai exact, pentru modelul considerat, demonstrăm existența și unicitatea soluției slabe într-un spațiu funcțional cu pondere, folosind argumente de teoria inegalităților variaționale de speța a doua:

Dat fiind $f \in V_m$, să se determine $u \in V_m$ astfel încat

$$(Au, v - u)_{V_m} + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_{V_m}, \quad \forall v \in V_m,$$

și teoria operatorilor tare monotoni.

Notăm că $m: \bar{\Omega} \rightarrow R$ este un coeficient de material astfel încat

$$(H) \quad \inf_{\Omega} m = 0$$

și

$$(Au, v)_{V_m} = \int_{\Omega} [m(x)\nabla u(x) + b(x)(\nabla u(x) - P_K(\frac{1}{2}\nabla u(x))) \cdot \nabla v(x)] dx, \quad \forall u, v \in V_m,$$

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} g |gv(x)| d\Gamma \quad \forall v \in V_m.$$

Analiza propusă permite utilizarea metodei elementului finit pentru aproximarea soluției acestui sistem fizic complex.

A. Matei, *A variational approach for an electro-elastic unilateral contact problem*, *Mathematical Modelling and Analysis*, 14(3), 323-334, 2009.

În această lucrare este analizată o problemă de mecanică care modelează contactul unilateral dintre un corp electro-elastic și o fundație rigidă, implicând efectul piezoelectric:

Să se determine câmpul deplasare $u : \Omega \rightarrow R^d$ și câmpul potențial electric $j : \Omega \rightarrow R$ astfel încât

$$\begin{aligned} \text{Div} \mathbf{s} + f_0 &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \text{div} D &= q_0 && \text{in } \Omega, \\ \mathbf{s} &= C e(u) + E^T \nabla j && \text{in } \Omega, \\ D &= E e(u) - b \nabla j && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{pe } \Gamma_1, \\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} &= f_2 && \text{pe } \Gamma_2, \\ j &= 0 && \text{pe } \Gamma_a, \\ D \cdot \mathbf{n} &= q_2 && \text{pe } \Gamma_b, \\ u_n \leq 0, \mathbf{s}_n \leq g; (u_n - g)\mathbf{s}_n &= 0 && \text{pe } \Gamma_3. \end{aligned}$$

Introducând următoarele spații funcționale,

$$\begin{aligned} V &= \{v \in [H^1(\Omega)]^d \mid v = 0 \text{ pe } \Gamma_1\}, \\ V_n &= \{v \in V \mid v_n = 0 \text{ pe } \Gamma_3\}, \\ \Phi &= \{q \in [H^1(\Omega)] \mid q = 0 \text{ pe } \Gamma_a\}, \\ \tilde{V} &= V_n \times \Phi. \end{aligned}$$

pentru modelul considerat am propus o formulare variațională mixtă (cu multiplicatori Lagrange), după cum urmează:

$$\begin{aligned} \text{(PV)} \quad a(\tilde{u}, \tilde{v}) + b(\tilde{v}, I) &= (\tilde{f}, \tilde{v})_{\tilde{V}} \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}, \\ b(\tilde{u}, m - I) &\leq 0 \quad \forall m \in \Lambda. \end{aligned}$$

unde

$$a : \tilde{V} \times \tilde{V} \rightarrow R,$$

$$a(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{\Omega} C e(u) \cdot e(v) dx + \int_{\Omega} e(v) \cdot \nabla j dx - \int_{\Omega} E e(u) \cdot \nabla q dx + \int_{\Omega} b \nabla j \cdot \nabla q dx,$$

$$(\tilde{f}, \tilde{v})_{\tilde{V}} = \int_{\Omega} f_0 \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot v dx - \int_{\Gamma_b} q_2 q da + \int_{\Omega} q_0 q dx,$$

$$\Lambda = \left\{ m \in M \mid \langle m, v \rangle_{\Gamma_3} \leq \int_{\Gamma_3} g \|v\| ds \quad \forall v \in V_n \right\}$$

$$M \text{ fiind dualul spațiului } W = [H^{1/2}(\Gamma_3)]^d,$$

$$b : \tilde{V} \times M \rightarrow R, \quad b(\tilde{v}, m) = \langle m, v \rangle_{\Gamma_3}$$

și

$$\langle l, v \rangle_{\Gamma_3} = \int_{\Gamma_3} s n \cdot v da \quad \forall v \in V.$$

Notăm că problema variațională (PV) nu este echivalentă cu o problemă de punct și deoarece forma biliniară a nu este simetrică. Utilizând elemente de analiză convexă și o tehnică de punct fix am demonstrat existența și unicitatea soluției slabe. Această abordare (cu multiplicatori Lagrange duali) permite utilizarea unor tehnici moderne de analiză numerică în vederea scrierii de algoritmi eficienți pentru aproximarea soluției. Studiul materialelor piezoelectrice este de actualitate, acest tip de materiale fiind utilizate în radioelectronică, electroacustică și în realizarea unor echipamente de măsură.

R. Ciurcea and A. Matei, *Solvability of a mixed variational problem*, Ann. Univ. Craiova, Mathematics and Informatics Series **36** (2009), 105-111

În această lucrare se consideră o problemă variațională mixtă provenind din mecanica mediilor de contact:

(PA) Fiind dat $f \in X$, să se determine $u \in X$ și $l \in \Lambda$ astfel încât

$$\begin{aligned} a(u, v - u) + j(v) - j(u) + b(v - u, l) &\geq (f, v - u)_X, & \forall v \in X, \\ b(u, m - l) &\leq 0, & \forall m \in \Lambda. \end{aligned}$$

Din punct de vedere matematic, problema propusă este un sistem de două inegalități variaționale, prima scriindu-se într-un spațiu Hilbert iar a doua într-o submulțime convexă a unui al doilea spațiu Hilbert. Folosind proprietăți de convexitate și bazându-ne pe un rezultat de existență a punctelor fixe, am demonstrat existența soluției. Întărind ipotezele, unicitatea precum și stabilitatea soluției au fost de asemenea discutate.

Potrivit unui calcul preliminar, această problemă abstractă servește rezolvării în sens slab a problemelor de mecanica contactului care vizează corpuri deformabile în contact bilateral pe o porțiune a frontierei cu o fundație rigidă și care pot intra în contact unilateral cu un obstacol pe o altă porțiune a frontierei. O aplicație a problemei (PA) face obiectul lucrării R. Ciurcea, A. Matei, *Multibody contact problems*, în preparare.

3. Alte realizări privind valorificarea rezultatelor

3.1. Participări la Conferințe și Workshop-uri

- Participarea domnului Micu Sorin la Workshopul *Partial Differential Equations Optimal Design and Numerics* de la Benasque, Spania 23 august-4 septembrie 2009. Aici dânsul a organizat, împreună cu M. Gugat, o sesiune deschisă cu tema *Control problems for PDE* pe 27 august 2009 și a realizat prezentarea *On the uniform controllability of the discrete wave equation with numerical viscosity*.
- Participarea domnului Niculescu Constantin la conferința internațională *Analysis, Inequalities and Homogenization Theory* (AIHT 2009), Lulea University of Technology, Lulea, Sweden, June 8-11, 2009. Dânsul a prezentat conferința *Convexity in spaces with a curved geometry*.

3.2. Vizite de lucru la universități de prestigiu (unde s-au făcut prezentări în seminarii și s-au pregătit lucrări în colaborare)

- *Centro de modelamiento matematico*, Santiago de Chile (Micu Sorin, 11 ianuarie-7 februarie 2009)
- Universitat Stuttgart, Germania (Matei Andaluza, 20.07.09-1.08.09 și 29.08.09-12.09.09)
- Université de Nancy, Franța (Roventă Ionel, 1-12 sept. 09)
- Basque Center for Applied Mathematics, Bilbao, Spania (Micu Sorin, 25 octombrie - 21 noiembrie 2009).

4. Dezvoltarea resursei umane înalt calificate

Domnul Ionel Roventă, doctorand în momentul aprobării finanțării grantului, a susținut pe 24 noiembrie 2008 teza de doctorat *Aspecte ale convexității în spațiile cu geometrie curbă*, sub conducerea directorului de proiect. Teza a fost confirmată.

Dânsul a fost puternic implicat la realizarea grantului, contribuind la publicarea a două lucrări ISI. A efectuat și o vizită de cercetare la Nancy, menționată la punctul 3.2.

Pe 1 decembrie 2009 a fost cooptat un nou doctorand, în persoana doamnei Minuță Corina-Flavia.

Nu în ultimul rând, trebuie notat faptul că grantul 420/2008 sprijină programul de master-doctorat în matematici al Universității din Craiova, creând un stimulent pentru întreaga activitate a cadrelor didactice și a studenților de acolo.

Craiova, 15 decembrie 2009

Director de proiect

Prof. dr. Constantin P. Niculescu