Geometria Diferenţială a Curbelor şi Suprafeţelor

Vladimir Slesar

January 29, 2016

Cuprins

Capitolul 1

Curbe netede

1.1 Noţiunea de curbă

Considerăm spaţiul $\mathbf{R}^3$ dotat cu un reper cartezian ortonormat $(O, \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$.

Definiţia 1 *O* curbă parametrizată *este o aplicaţie de clasă* C^∞, $\bar{r} : I \to \mathbf{R}^3$, *cu* $I \subseteq \mathbf{R}$, *descrisă în coordonate prin*

$$\bar{r}(t) = \left(x^1(t), x^2(t), x^3(t)\right), \qquad (\forall)\, t \in I.$$

Imaginea $\bar{r}(I)$ a aplicaţiei $\bar{r} : I \to R^3$ se numeşte *suportul curbei.*
Figuri
Exemple
$\bar{r}_1\,(t) = \bar{r}_0 + t\bar{m}$
$\bar{r}_2\,(t) = \bar{r}_0 + t^2\bar{m}$
$\bar{r}_3(t) = (a\cos t, b\sin t, ct)$
$\bar{r}_4(t) = (0, t^3, t^2)$

Observaţia 1 *Să observăm că* $\bar{r}_1$ *şi* $\bar{r}_2$ *au aceeaşi dreaptă suport dar* $\bar{r}_1\,(R) \neq \bar{r}_2\,(R)$.

In continuare vom nota prin $\bar{r}' = \frac{d\bar{r}}{dt} := (\dot{x}^1(t), \dot{x}^2(t), \dot{x}^3(t))$ derivata în raport cu parametrul t a funcţiei vectoriale $\bar{r}$. $\bar{r}'(t)$ va reprezenta vectorul tangent la curbă în punctul $P = \bar{r}(t)$.

Definiţia 2 *O curbă* $\bar{r}$ *se numeşte* regulată *în punctul* t *dacă* $\bar{r}'(t) \neq \bar{0}$. *Dacă, în plus,*

$$\bar{r} : (a, b) \to \bar{r}(I)$$

este un homeomorfism, atunci curba se numeşte arc de curbă.

Exemple:
Curbele $\bar{r}_1$ şi $\bar{r}_3$ sunt arce de curbă, dar $\bar{r}_2$ şi $\bar{r}_4$ nu sunt regulate în 0, $\bar{r}_2$ nefiind de asemenea un homeomorfism.

Fie acum $\bar{r}_1 : (a_1, b_1) \to R^3$, $\bar{r}_2 : (a_2, b_2) \to R^3$, $t_1 = t_1(t_2) = \lambda(t_2)$ astfel încât $\lambda : I_2 \to I_1$ un difeomorfism astfel încât

$$\bar{r}_2 = \bar{r}_1 \circ \lambda.$$

Să observăm că în aceste condiţii avem evident $\bar{r}_1(I_1) = \bar{r}_2(I_2)$.

Definiţia 3 *In condiţiile în care există aplicaţia λ ca mai sus, cele două curbe parametrizate se numesc* echivalente. *Se mai spune că cele două parametrizari sunt echivalente, definind aceeaşi curbă.*

Exemple:
Se observă că $\bar{r}_1$ şi $\bar{r}_2$ nu sunt echivalente.
Să considerăm acum

$$\begin{aligned} \bar{r}_1(u) &= \left(a\frac{1-u^2}{1+u^2}, b\frac{2u}{1+u^2}, 2c \cdot arctg\ u\right) \ \bar{r}_2 : (-1,1) \to R^3. \\ \bar{r}_2(t) &= (a\cos t, b\sin t, ct),\ \bar{r}_1 : \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \to R^3, \end{aligned}$$

Cele două parametrizări sunt echivalente.

Definiţia 4 *O mulţime $\Gamma \subset R^3$ se numeşte* curbă *dacă pentru orice $M \in \Gamma$, există un arc de curbă $\bar{r} : I \to R^3$, cu $\bar{r}(I)$ vecinătate a lui M în Γ.*

Dacă este nevoie de un singur arc pentru a acoperi toată curba, aceasta se numeşte curbă *simplă*.
Exemple:
Dacă Γ este o dreaptă, atunci există o parametrizare globală, deci este o curbă simplă.
Prin contrast, un cerc nu este homeomorf cu un segment sau cu o dreaptă, deci cercul nu poate fi o curbă simplă.

Definiţia 5 *Fie o curbă parametrizată $\bar{r} : I \to R^3$, ßi a, $b \in I$, $b > a$. Prin* lungimea *unui arc de curbă parametrizată între a şi b vom înţelege*

$$l(\bar{r})_a^b := \int_a^b \|\bar{r}'(\tau)\|\, d\tau$$

Propoziţia 1 *In cazul mai multor parametrizări echivalente lungimea este un invariant.*

Demonstraţie: Fie $\bar{r}_1 : [a_1, b_1] \to \mathbf{R}^3$, $\bar{r}_2 : [a_2, b_2] \to \mathbf{R}^3$, cu $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$. Considerând $\lambda : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$ un difeomorfism, cu $\bar{r}_2 = \bar{r}_1 \circ \lambda$, vom avea $\lambda(a_2) = a_1$, $\lambda(b_2) = b_1$, şi $\lambda'(t_2) > 0$, pentru orice $t_2 \in [a_2, b_2]$.

In consecinţă

$$\begin{aligned}
\int_{a_1}^{b_1} \|\bar{r}_1'(t_1)\| \, dt_1 &= \int_{a_2}^{b_2} \|\bar{r}_1'(\lambda(t_2))\| \cdot \lambda'(t_2) \, dt_2 \\
&= \int_{a_2}^{b_2} \|\bar{r}_1'(\lambda(t_2))\| \cdot |\lambda'(t_2)| \, dt_2 \\
&= \int_{a_2}^{b_2} \|\bar{r}_1'(\lambda(t_2))\lambda'(t_2)\| \, dt_2 \\
&= \int_{a_2}^{b_2} \|\bar{r}_2'(t_2)\| \, dt_2,
\end{aligned}$$

iar de aici rezultă concluzia.

Definiţia 6 *Dacă o curbă $\bar{r}(s)$ are proprietatea că $\|\bar{r}'(s)\| = 1$, atunci se spune că parametrizarea este* naturală.

Observaţia 2 *In cazul unei parametrizări naturale avem $l(\bar{r})_a^b = b - a$.*

Teorema 1 *Există o parametrizare naturală echivalentă pentru orice curbă parametrizată.*

Demonstraţie: Fie $\bar{r} : [a,b] \to \mathbf{R}^3$, cu parametrizarea $t \longmapsto \bar{r}(t)$. Luăm $s(t) = \lambda(t) := \int_a^t \|\bar{r}'(\tau)\| \, d\tau$. In consecinţă

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_a^t \|\bar{r}'(\tau)\| \, d\tau\right) = \|\bar{r}'(t)\|,$$

iar

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\bar{r}'(t)\|}.$$

Aşadar

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{d\bar{r}}{ds}\right\| &= \left\|\frac{d\bar{r}}{dt}\right\| \cdot \left|\frac{dt}{ds}\right| \\
&= \|\bar{r}'(t)\| \cdot \frac{1}{\|\bar{r}'(t)\|} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

In concluzie, parametrizarea $s \longmapsto \bar{r}(s)$ este naturală.

1.2 Dreaptă tangentă şi plan osculator la o curbă

Definiţia 7 *Se numeşte* vector tangent *la o curbă* $\bar{r} : I \to R^3$ *în punctul* $t_0 \in I$ *vectorul*

$$\bar{r}'(t_0) := \left(\dot{x}^1(t_0), \dot{x}^2(t_0), \dot{x}^3(t_0)\right).$$

Vom utiliza şi notaţia $\frac{d\bar{r}}{dt}(t_0) := \bar{r}'(t_0)$, iar versorul lui $\frac{d\bar{r}}{dt}(t_0)$ îl vom nota $\bar{\tau}(t_0)$. Să observăm că direcţia vectorului tangent nu depinde de parametrizare. Intr-adevăr, fie $t = t(u)\,(= \varphi(u))$, $\varphi(u_0) = t_0$ -o schimbare netedă de parametru. Avem

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{r}}{du}(u_0) &= \frac{dt}{du}(u_0)\frac{d\bar{r}}{dt}(t_0) \\ &= \varphi'(u_0)\frac{d\bar{r}}{dt}(t_0).\end{aligned}$$

Definiţia 8 *Dreapta determinată de vectorul director* $\bar{\tau}(t_0)$ *şi de punctul* $\bar{r}(t_0)$ *se numeşte* dreapta tangentă *la curbă în punctul respectiv.*

Aceasta va avea ecuaţia vectorială

$$d_{tg} : \bar{r} = \bar{r}(t_0) + t\bar{r}'(t_0).$$

In coordonatele din $\mathbf{R}^3$ vom avea

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + t\dot{x}^1 \\ x^2 = x_0^2 + t\dot{x}^2 \\ x^3 = x_0^3 + t\dot{x}^3 \end{cases}$$

sau, echivalent

$$\frac{x^1 - x_0^1}{\dot{x}^1} = \frac{x^2 - x_0^2}{\dot{x}^2} = \frac{x^3 - x_0^3}{\dot{x}^3},$$

păstrând convenţia ca anularea numitorului să implice şi anularea numărătorului.

Observaţia 3 *Dreapta tangentă reprezintă poziţia limită a unei drepte ce uneşte două puncte* M_0 *şi* M *de pe curbă având vectori de poziţie* $\bar{r}(t_0)$ *şi* $\bar{r}(t)$ *atunci când* $t \to t_0$. *Pentru a proba aceasta avem*

$$\begin{aligned}\bar{r}'(t_0) &= \lim_{t \to t_0} \frac{\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}\left(\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)\right).\end{aligned}$$

Aşadar dreapta M_0M *are ca vector director vectorul* $\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)$. *Când* $t \to t_0$, *dreapta* M_0M *tinde către dreapta tangentă la curbă în* t_0.

Definiţia 9 *Dacă într-un punct* $t_0 \in I$, *avem* $\bar{r}'(t_0) \times \bar{r}''(t_0) \neq \bar{0}$, *(deci vectorii* $\bar{r}'(t_0)$ *şi* $\bar{r}''(t_0)$ *sunt nenuli şi liniar independenţi), atunci curba se numeşte* biregulată *în* t_0.

Definiţia 10 *Dacă $\bar{r} : I \to R^3$ este biregulată în t_0, atunci prin plan osculator înţelegem planul ce trece prin punctul corespunzător lui $\bar{r}(t_0)$ şi are ca subspaţiu vectorial director acoperirea liniară $\mathcal{L}(\bar{r}'(t_0), \bar{r}''(t_0)) := \{\alpha\bar{r}'(t_0) + \beta\bar{r}''(t_0) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$.*

Observaţia 4 *Să observăm că planul osculator nu depinde de parametrizare. Intradevăr, fie $t = t(u)$, $t(u_0) = t_0$ -o schimbare de parametru. Vom avea*

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{r}}{du}(u_0) &= \frac{dt}{du}(u_0)\frac{d\bar{r}}{dt}(t_0), \\
\frac{d^2\bar{r}}{du^2}(s_0) &= \frac{d}{du}\left(\frac{dt}{du}(u_0)\frac{d\bar{r}}{dt}(t_0)\right) \\
&= \frac{d^2t}{du^2}(u_0)\frac{d\bar{r}}{dt}(t_0) + \frac{dt}{du}(u_0)\frac{dt}{du}(u_0)\frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}(t_0)\right) \\
&= \frac{d^2t}{du^2}(u_0)\frac{d\bar{r}}{dt}(t_0) + \left(\frac{dt}{ds}(u_0)\right)^2\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}(t_0),
\end{aligned}$$

aşadar $\frac{d\bar{r}}{du}(u_0)$, $\frac{d^2\bar{r}}{du^2}(u_0) \in \mathcal{L}(\bar{r}'(t_0), \bar{r}''(t_0))$ şi cum cei doi vectori sunt de asemenea liniar independenţi, vom avea

$$\mathcal{L}\left(\frac{d\bar{r}}{ds}(s_0), \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}(s_0)\right) = \mathcal{L}(\bar{r}'(t_0), \bar{r}''(t_0)).$$

Planul osculator va avea ecuaţia vectorilală

$$\pi_{osc} : [\bar{r} - \bar{r}(t_0), \bar{r}'(t_0), \bar{r}''(t_0)] = 0.$$

In coordonate în R^3 vom avea ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x^1 - x_0^1 & x^2 - x_0^2 & x^3 - x_0^3 \\ \dot{x}^1 & \dot{x}^2 & \dot{x}^3 \\ \ddot{x}^1 & \ddot{x}^2 & \ddot{x}^3 \end{vmatrix} = 0$$

Observaţia 5 *Planul osculator reprezintă poziţia limită a planului determinat de punctul corespunzător lui $\bar{r}(t_0)$, vectorul tangent $\bar{r}'(t_0)$ şi vectorul $\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)$.*

1.3 Curbura unei curbe

Fie $\bar{r} : I \to R^3$ o curbă pe care o vom considera cu parametrizarea naturală $\bar{r} : s \longmapsto \bar{r}(s)$. Cum $\left\|\frac{d\bar{r}}{ds}\right\| = 1$, vom avea $\frac{d\bar{r}}{ds}(s_0) = \bar{\tau}(s_0)$.

Observaţia 6 *Dacă $\bar{r}(s_1)$ este o parametrizare naturală şi $s_1 = s_1(s_2)$, este o altă parametrizare, de asemenea naturală, atunci vom avea*

$$\left\|\frac{d\bar{r}}{ds_1}\right\| = \left\|\frac{d\bar{r}}{ds_2}\right\| = 1,$$
$$\left\|\frac{d\bar{r}}{ds_2}\right\| = \left|\frac{ds_1}{ds_2}\right| \left\|\frac{d\bar{r}}{ds_1}\right\|.$$

deci $s_1 = \pm s_2 + c$, cu $c \in R$ o constantă arbitrară.

In aceste condiţii

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar r}{ds_2^2} &= \frac{d}{ds_2}\left(\frac{ds_1}{ds_2}\frac{d\bar r}{ds_1}\right)\\ &= \frac{d^2s_1}{ds_2^2}\frac{d\bar r}{ds_1} + \left(\frac{ds_1}{ds_2}\right)^2\frac{d^2\bar r}{ds_1^2}\\ &= \frac{d^2\bar r}{ds_1^2},\end{aligned}$$

deci vectorul $\frac{d^2\bar r}{ds^2}$ nu depinde de parametrizarea naturală aleasă. Să mai observăm ca din relaţia $\left\|\frac{d\bar r}{ds}\right\| = 1$ vom obţine

$$\frac{d\bar r}{ds}(s_0) \perp \frac{d^2\bar r}{ds^2}(s_0)$$

în orice $s_0 \in I$.

Definiţia 11 *Vectorul* $\frac{d^2\bar r}{ds^2}(s_0)$ *se numeşte* vector de curbură *iar norma sa* $k_1(s_0) := \left\|\frac{d^2\bar r}{ds^2}(s_0)\right\|$ *se numeşte* curbura curbei *în punctul corespunzător lui* s_0*; versorul vectorului de curbură va fi notat pe mai departe cu* $\bar\nu(s_0)$*.*

In consecinţă

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar r}{ds^2}(s_0) &= \frac{d\bar\tau}{ds}(s_0)\\ &= k_1(s_0)\,\bar\nu(s_0)\,.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Referitor la interpretarea geometrică a curburii.

Fie $\alpha_s := \angle(\bar\tau(s_0), \bar\tau(s))$. Avem

$$\begin{aligned}\lim_{s\to s_0}\left|\frac{\alpha_s}{s-s_0}\right| &= \lim_{s\to s_0}\left|\frac{\sin\frac{\alpha_s}{2}}{\frac{\alpha_s}{2}}\right|\left|\frac{\alpha_s}{s-s_0}\right|\\ &= \lim_{s\to s_0}\frac{\left|2\sin\frac{\alpha_s}{2}\right|}{|s-s_0|}\\ &= \lim_{s\to s_0}\frac{\|\bar\tau(s)-\bar\tau(s_0)\|}{|s-s_0|}\\ &= \left\|\frac{d^2\bar r}{ds^2}(s_0)\right\|\\ &= k_1(s_0)\,.\end{aligned}$$

Aşadar curbura reprezintă viteza de variaţie dintre dreptele tangente (unghi de contingenţă).

Cum in general este dificil de construit o parametrizare naturală, ar fi util........

Propoziţia 2 *Intr-o parametrizare oarecare k_1 poate fi calculat cu formula*

$$k_1 = \frac{\left\| \frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \right\|}{\left\| \frac{d\bar{r}}{dt} \right\|^3}.$$

Demonstraţie: Avem relaţiile

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}}{dt} &= \frac{ds}{dt}\frac{d\bar{r}}{ds}, \\ \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\frac{d\bar{r}}{ds}\right) \\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\frac{d\bar{r}}{ds} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

deci

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \frac{d\bar{r}}{ds} \times \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}.$$

Dar cum $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}$, $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = k_1\bar{\nu}$ şi $\bar{\tau} \perp \bar{\nu}$, vom obţine

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \right\|^2 &= \begin{vmatrix} \left\langle \frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d\bar{r}}{ds} \right\rangle & \left\langle \frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \frac{d\bar{r}}{ds} \right\rangle & \left\langle \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right\rangle \end{vmatrix} \\ &= k_1^2. \end{aligned}$$

De aici, considerând şi relaţia $\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\bar{r}}{dt} \right\|$, rezultă concluzia.

Observaţia 7 *Curbura $k_1(t) \neq 0$ dacă şi numai dacă $\bar{r}$ este curbă biregulată în punctul t.*

Notăm pe mai departe

$$\bar{\beta}(s) := \bar{\tau}(s) \times \bar{\nu}(s),$$

direcţia determinată într-o parametrizare naturală de versorul $\bar{\beta}(s)$ fiind direcţia *binormală*.

Vom evalua pe mai departe $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$. Avem

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\beta}}{ds} &= \frac{d}{ds}(\bar{\tau} \times \bar{\nu}) \\ &= \frac{d\bar{\tau}}{ds} \times \bar{\nu} + \bar{\tau} \times \frac{d\bar{\nu}}{ds}. \end{aligned}$$

Cum $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = k_1\bar{\nu}$, va rezulta

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = \bar{\tau} \times \frac{d\bar{\nu}}{ds}.$$

Acum, în orice punct s vectorul $\frac{d\bar{\beta}}{ds}(s)$ este perpendicular pe $\bar{\beta}(s)$ şi pe $\bar{\tau}(s)$, deci va fi coliniar cu $\bar{\nu}(s)$ cum

$$\bar{\nu}(s) = \bar{\beta}(s) \times \bar{\tau}(s)$$

avea direcţia în consecinţă există o funcţie reală $\lambda : I \to \mathbf{R}$ astfel încât

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds}(s) = \lambda(s)\bar{\nu}(s).$$

Vom avea

$$\begin{aligned} \lambda &= \left\langle \frac{d\bar{\beta}}{ds}, \bar{\nu} \right\rangle = \left\langle \bar{\tau} \times \frac{d\bar{\nu}}{ds}, \bar{\nu} \right\rangle \\ &= \left[\bar{\tau}, \frac{d\bar{\nu}}{ds}, \bar{\nu} \right] = -\left[\bar{\tau}, \bar{\nu}, \frac{d\bar{\nu}}{ds} \right]. \end{aligned}$$

Cum însă

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \frac{d\bar{r}}{ds} \\ \bar{\nu} &= \frac{1}{k_1} \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \\ \frac{d\bar{\nu}}{ds} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_1} \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right) \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_1} \right) \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} + \frac{1}{k_1} \frac{d^3\bar{r}}{ds^3}, \end{aligned}$$

aşadar

$$\lambda = -\frac{1}{k_1^2} \left[\frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} \right].$$

Vom nota pe mai departe

$$\begin{aligned} k_2 \quad : &= -\lambda \\ &= \frac{1}{k_1^2} \left[\frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} \right]. \end{aligned}$$

Vom obţine

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = -k_2\bar{\nu} \tag{1.3}$$

Definiţia 12 *Intr-o parametrizare naturală, pentru un $s \in I$ fixat, cantitatea $k_2(s)$ se numeşte* torsiunea *curbei în punctul $\bar{r}(s)$.*

Observaţia 8 *Analog ca mai sus, putem interpreta $|k_2(s)|$ ca fiind viteza de variatie a unghiului facut de direcţiile binormale.*

Observaţia 9 *Triedrul* $\left\{\bar{\tau},\bar{\nu},\bar{\beta}\right\}$ *ce a rezultat mai sus se numeşte* triedrul Frenet*. Planul determinat de punctul curent pe curbă şi de direcţiile* $\bar{\nu}$ *şi* $\bar{\beta}$ *în punctul respectiv se numeşte* plan normal*; el este aşadar perpendicular pe direcţia tangentă* $\bar{\tau}$*. In fine, planul determinat de punctul curent pe curbă şi de direcţiile* $\bar{\tau}$ *şi* $\bar{\beta}$*, perpendicular pe* $\bar{\nu}$ *se numeşte* plan rectificator*. La o schimbare de parametrizare naturală ce presupune schimbarea sensului* $\bar{\nu}(s)$ *rămâne invariant, în schimb* $\bar{\tau}(s)$ *îşi schimbă sensul şi în consecinţă şi* $\bar{\beta}(s)$*.*

Ca mai sus, ar fi util într-o parametrizare oarecare....

Propoziţia 3 *Intr-o parametrizare oarecare putem exprima torsiunea prin expresia*

$$k_2 = \frac{\left[\frac{d\bar{r}}{dt},\frac{d^2\bar{r}}{dt^2},\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right]}{\left\|\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right\|^3}.$$

Demonstraţie: Pornim de la formula obţinută mai sus

$$k_2 = \frac{1}{k_1^2}\left[\frac{d\bar{r}}{ds},\frac{d^2\bar{r}}{ds^2},\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}\right].$$

Din relaţiile (1.2) obţinem:

$$\frac{d^3\bar{r}}{dt^3} = \frac{d^3s}{dt^3}\frac{d\bar{r}}{ds} + 3\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\frac{d\bar{r}}{ds} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^3\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}.$$

Vom avea

$$\left[\frac{d\bar{r}}{dt},\frac{d^2\bar{r}}{dt^2},\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right] = \left(\frac{ds}{dt}\right)^6\left[\frac{d\bar{r}}{ds},\frac{d^2\bar{r}}{ds^2},\frac{d^3\bar{r}}{ds^3}\right].$$

Considerând relaţia

$$k_1 = \frac{\left\|\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right\|}{\left\|\frac{d\bar{r}}{dt}\right\|^3},$$

se obţine relaţia de mai sus.y

Am găsit deja formulele (1.1) şi (1.3). Să calculăm şi $\frac{d\bar{\nu}}{ds}$ utilizând aceste formule.

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\nu}}{ds} &= \frac{d}{ds}\left(\bar{\beta}\times\bar{\tau}\right) \\ &= -k_2\bar{\nu}\times\bar{\tau} + \bar{\beta}\times k_1\bar{\nu} \\ &= -k_1\bar{\tau} + k_2\bar{\beta}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

In consecinţă am obţinut cele trei formule ale lui Frenet

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\tau}}{ds} = k_1\bar{\nu}. \\ \frac{d\bar{\nu}}{ds} = -k_1\bar{\tau} + k_2\bar{\beta} \\ \frac{d\bar{\beta}}{ds} = -k_2\bar{\nu} \end{cases}$$

In scriere matricială obţinem

$$\begin{pmatrix} \bar{\tau} \\ \bar{\nu} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\tau} \\ \bar{\nu} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}.$$

Următorul rezultat poartă numele de *Teorema fundamentală a curbelor*.

Teorema 2 *Dacă două curbe $\bar{r}_1$ şi $\bar{r}_2$, $\bar{r}_1, \bar{r}_2 : I \to \mathbf{R}^3$ cu parametrizare naturală au aceeaşi curbură şi aceeaşi torsiune, atunci coincid până la o izometrie de tipul I. Dacă $\bar{r}_1, \bar{r}_2 : I \to \mathbf{R}^2$ deci cele două curbe sunt plane şi au aceeaşi curbură, atunci din nou coincid până la o izometrie de tipul I.*

Pentru demonstraţie indicăm [do Car, Mur, Orn].

Capitolul 2

Teoria diferenţială a suprafeţelor

2.1 Suprafeţe regulate

Definiţia 13 *Prin suprafaţă regulată înţelegem o submulţime $S \subseteq \mathbf{R}^3$ cu proprietatea că pentru orice punct $x \in S$, există un deschis $V \subseteq \mathbf{R}^3$, $x \in V$, un deschis $U \subseteq \mathbf{R}^2$ (modelul aritmetic) şi un homeomorfism $\bar{r} : U \to V \cap S$, astfel încât matricea Jacobi $J(\bar{r})_y$ să aibă rangul 2 (rang maxim), pentru orice $y \in U$.*

Observaţia 10 *Aplicaţia $\bar{r}$ va avea forma*

$$\bar{r} : \left(u^1, u^2\right) \longrightarrow \left(x^1\left(u^1, u^2\right), x^2\left(u^1, u^2\right), x^3\left(u^1, u^2\right)\right).$$

Vom nota în cele ce urmează $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1} = \bar{r}'_{u^1}$, $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^2} = \bar{r}'_{u^2}$. Condiţia

$$rang\left(J(\bar{r})_x\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} = 2$$

este echivalentă cu relaţia

$$\bar{r}'_{u^1} \times \bar{r}'_{u^2} \neq \bar{0}.$$

Observaţia 11 *Dacă $S = \bar{r}(U)$, deci este nevoie de o singură parametrizare, atunci suprafaţa se numeşte* simplă*.*

Exemple:

1)Să considerăm planul $\pi : ax^1 + bx^2 + cx^3 + d = 0$, cu $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, şi fie $c \neq 0$; putem scrie

$$\begin{aligned} \pi \quad : \quad x^3 &= -\frac{a}{c}x^1 - \frac{a}{c}x^2 - \frac{d}{c} \\ &= mx^1 + nx^2 + p. \end{aligned}$$

Putem considera acum parametrizarea

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = u^2 \\ x^3 = mu^1 + nu^2 + p, \end{cases}$$

deci vom avea parametrizarea

$$\bar{r}\left(u^1, u^2\right) = \left(u^1, u^2, mu^1 + nu^2 + p\right) \quad \left(u^1, u^2\right) \in \mathbf{R}^2.$$

In aceste condiţii

$$J(\bar{r}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ m & n \end{pmatrix}, \quad rang\left(J(\bar{r})\right) = 2.$$

2) Considerăm paraboloidul hiperbolic $\Gamma : (x^1)^2 - (x^2)^2 + x^3 = 0$. Pentru acesta avem parametrizarea

$$\bar{r}\left(u^1, u^2\right) = \left(u^1, u^2, \left(u^2\right)^2 - \left(u^1\right)^2\right), \quad \left(u^1, u^2\right) \in \mathbf{R}^2,$$

iar matricea Jacobi va fi

$$J(\bar{r}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2u^1 & +2u^2 \end{pmatrix}, \quad rang\left(J(\bar{r})\right) = 2$$

Ca şi în cazul curbelor putem avea o schimbare de parametru $\varphi : (v^1, v^2) \to (u^1, u^2)$, cu

$$\begin{cases} u^1 = u^1\left(v^1, v^2\right) \\ u^2 = u^2\left(v^1, v^2\right) \end{cases},$$

având condiţia de regularitate

$$\begin{aligned} rang J(\varphi) &= rang \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \frac{\partial u^1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial v^1} & \frac{\partial u^2}{\partial v^2} \end{pmatrix} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Exemplu:

Pentru paraboloidul hiperbolic de mai sus putem considera schimbarea de parametru

$$\varphi : \begin{cases} u^1 = v^1 + v^2 \\ u^2 = v^1 - v^2 \end{cases},$$

deci noua parametrizare va fi

$$\bar{r}_{1'}\left(v^1, v^2\right) = \left(v^1 + v^2, v^1 - v^2, -4v^1v^2\right), \quad \left(v^1, v^2\right) \in \mathbf{R}^2,$$

iar

$$\begin{aligned} rang J(\varphi) &= rang \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Vom prezenta câteva clase speciale de suprafeţe.

1. Suprafeţe riglate

Definiţia 14 *O suprafaţă cu parametrizarea*

$$\bar{r}\left(u^1,u^2\right)=\bar{a}\left(u^1\right)+u^2\bar{b}\left(u^1\right)$$

se numeşte suprafaţă riglată.

Exemple:

Cilindrul C definit prin parametrizare

$$\bar{r}\left(u^1,u^2\right)=\left(R\cos u^1,R\sin u^1,u^2\right),\quad \left(u^1,u^2\right)\in(0,2\pi)\times\mathbf{R},$$

poate fi considerat suprafaţă riglată, deoarece putem scrie

$$\bar{r}\left(u^1,u^2\right)=\left(R\cos u^1,R\sin u^1,0\right)+u^2\,(0,0,1)\,.$$

2. Suprafeţe de rotaţie

Definiţia 15 *O* suprafaţă de rotaţie *este o suprafaţă obţinută prin rotirea unei curbe în jurul unei axe.*

Să considerăm curba $\Gamma:\bar{r}\left(u^1\right)=\left(\varphi\left(u^1\right),\psi\left(u^1\right)\right)$ în planul x^1Ox^3. Obţinem

$$\begin{cases} x^1=\varphi\left(u^1\right)\\ x^2=0\\ x^3=\psi\left(u^1\right)\end{cases},\quad u^1\in I.$$

Rotind curba Γ în jurul axei Ox^3 vom obţine suprafaţa de rotaţie

$$\begin{cases} x^1=\varphi\left(u^1\right)\cos u^2\\ x^2=\varphi\left(u^1\right)\sin u^2\\ x^3=\psi\left(u^1\right)\end{cases},\quad \left(u^1,u^2\right)\in I\times(0,2\pi)\,,$$

aşadar parametrizarea va fi

$$\bar{r}\left(u^1,u^2\right)=\left(\varphi\left(u^1\right)\cos u^2,\varphi\left(u^1\right)\sin u^2,\psi\left(u^1\right)\right).$$

Exemplu:

Considerăm sfera S^2 în $\mathbf{R}^3$ cu parametrizarea

$$\bar{r}\left(u^1,u^2\right)=\left(R\cos u^1\cos u^2,R\cos u^1\sin u^2,R\sin u^1\right),\quad \left(u^1,u^2\right)\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\times(0,2\pi)\,.$$

In acest caz curba Γ va fi dată prin relaţiile

$$\begin{cases}\varphi\left(u^1\right)=R\cos u^1\\ \psi\left(u^1\right)=R\sin u^1\end{cases},\quad u^1\in\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right).$$

2.2 Vector tangent, plan tangent la o suprafaţă

Fie $\bar{c} : I \to S$ o curbă definită din intervalul I pe suprafaţa S.

Utilizând homeomorfismul local $\bar{r} : U \to \bar{r}(U)$, putem descompune curba $\bar{c}$ ca mai jos

$$\bar{c} = \bar{r} \circ \bar{\alpha},$$

cu $\bar{\alpha} : I \to U$ *imaginea locală* a curbei în modelul aritmetic U. Aşadar

$$\begin{aligned} \bar{c}(t) &= \left(x^1(t), x^2(t), x^3(t)\right) \\ &= \left(x^1\left(u^1(t), u^2(t)\right), x^2\left(u^1(t), u^2(t)\right), x^3\left(u^1(t), u^2(t)\right)\right). \end{aligned}$$

In aceste condiţii putem scrie vectorul tangent la curbă în punctul t:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{c}}{dt}(t) &= \frac{du^1}{dt}(t)\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1}(\bar{\alpha}(t)) + \frac{du^2}{dt}(t)\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^2}(\bar{\alpha}(t)) \\ &= \frac{du^1}{dt}(t)\,\bar{r}'_{u^1}(\bar{\alpha}(t)) + \frac{du^2}{dt}(t)\,\bar{r}'_{u^2}(\bar{\alpha}(t)). \end{aligned}$$

Definiţia 16 *Un vector tangent la suprafaţa S în $x \in S$ este un vector tangent la o curbă $\bar{c}$ pe suprafaţa S în punctul respectiv.*

Propoziţia 4 *Mulţimea T_xS a tuturor vectorilor tangenţi la S în x determină un spaţiu vectorial bidimensional.*

Dem. Am văzut că pentru orice curbă $\bar{c} : I \to S$ ca mai sus vectorul tangent $\frac{d\bar{c}}{dt}(x)$ se scrie ca o combinaţie liniară a vectorilor $\bar{r}'_{u^1}, \bar{r}'_{u^2}$. Cum punctul x este considerat regular, deci $\bar{r}'_{u^1}(x) \times \bar{r}'_{u^2}(x) \neq \bar{0}$, deci $\{\bar{r}'_{u^1}, \bar{r}'_{u^2}\}$ este un sistem de vectori liniar independent. Aşadar T_xS este inclus în acoperirea liniară $\mathcal{L}\{\bar{r}'_{u^1}, \bar{r}'_{u^2}\}$ a cei doi vectori.Vom arăta în cele ce urmează că şi incluziunea inversă are loc. Fie a, $b \in \mathbf{R}$ şi

$$\bar{v} := a\bar{r}'_{u^1}(x) + b\bar{r}'_{u^2}(x).$$

Să arătăm că $\bar{v} \in T_xS$. Fie curba $\bar{\alpha} : I \to U$ dată prin

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(t) &= \left(u^1(t), u^2(t)\right) \\ &= (at + a_0, bt + b_0), \end{aligned}$$

unde $\bar{r}(u_0^1, u_0^2) = x$. Vom avea $\bar{c}(t) = \bar{r} \circ \bar{\alpha}(t)$, şi

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{c}}{dt}(0) &= \frac{du^1}{dt}(0)\,\bar{r}'_{u^1}(x) + \frac{du^2}{dt}(0)\,\bar{r}'_{u^2}(x) \\ &= a\bar{r}'_{u^1}(x) + b\bar{r}'_{u^2}(x). \end{aligned}$$

Deci $\bar{v} \in T_xS$, iar T_xS este planul determinat de punctul x şi subspaţiul vectorial director $\mathcal{L}\{\bar{r}'_{u^1}, \bar{r}'_{u^2}\}$.

Fixăm în continuare punctul $x_0 \in S$. Planul tangent în acest punct la S va avea ecuaţia

$$\pi_{tg}: \begin{vmatrix} x - x_0^1 & x - x_0^2 & x - x_0^3 \\ \dot{x}_{u^1}^1 & \dot{x}_{u^1}^2 & \dot{x}_{u^1}^3 \\ \dot{x}_{u^2}^1 & \dot{x}_{u^2}^2 & \dot{x}_{u^2}^3 \end{vmatrix} = 0,$$

cu $\bar{r}'_{u^1}(x_0) = (\dot{x}_{u^1}^1, \dot{x}_{u^1}^2, \dot{x}_{u^1}^3)$, $\bar{r}'_{u^2}(x_0) = (\dot{x}_{u^2}^1, \dot{x}_{u^2}^2, \dot{x}_{u^2}^3)$.

Definiţia 17 *Dreapta ce trece prin x_0 şi este perpendiculară pe T_xS se numeşte* dreaptă normală la suprafaţă.

Fie vectorul normal la suprafaţă în x_0, $\bar{N}_{x_0} := \bar{r}'_{u^1}(x_0) \times \bar{r}'_{u^2}(x_0)$, $\bar{N}_{x_0} := \left(N_{x_0}^1, N_{x_0}^2, N_{x_0}^3\right)$. In aceste condiţii, ecuaţia dreptei normale va fi

$$d_n: \frac{x^1 - x_0^1}{N_{x_0}^1} = \frac{x^1 - x_0^1}{N_{x_0}^1} = \frac{x^1 - x_0^1}{N_{x_0}^1}.$$

Observaţia 12 *Deşi $\bar{N}_{x_0}$ depinde de parametrizarea aleasă (deoarece parametrizarea induce local o orientare), dreapta normală rămâne invariantă.*

2.3 Aplicaţia diferenţială asociată unei aplicaţii între suprafeţe

In cele ce urmează vom extinde noţiunea de diferenţială a unei aplicaţii pentru cazul aplicaţiilor între suprafeţe.

Fie S_1, S_2 suprafeţe, $\varphi: S_1 \to S_2$ şi $x \in S_1$, $\varphi(x) \in S_2$, cu parametrizările locale $(U_1, \bar{r}_1)$, $(U_2, \bar{r}_2)$, cu $x \in \bar{r}_1(U_1)$, $\varphi(x) \in \bar{r}_2(U_2)$. Vom nota cu (u^1, u^2) coordonatele în U_1 ßi cu (v^1, v^2) coordonatele în U_2.

Definiţia 18 *Spunem că φ este diferenţiabilă în x dacă aplicaţia $\psi: U_1 \to U_2$ definită prin*

$$\psi := \bar{r}_2 \circ \varphi \circ \bar{r}_1$$

este diferenţiabilă în jurul lui x.

Dacă φ este diferenţiabilă în orice $x \in S$, spunem că φ este diferenţiabilă. Pe mai departe vom presupune că φ este diferenţiabilă.

Luăm acum curba netedă $\bar{c}_1: I \to S_1$, $\bar{c}_1 := \bar{r}_1 \circ \bar{\alpha}_1$, cu $\bar{\alpha}_1: I \to U_1$, $\bar{c}_1(0) = x$ şi în consecinţă $\frac{d\bar{c}}{dt}(0) \in T_xS_1$.

Definiţia 19 *Aplicaţia $d\varphi_x: T_xS_1 \to T_{\varphi(x)}S_2$ ce asociază vectorului $\frac{d\bar{c}_1}{dt}(0)$ vectorul $\frac{d\varphi \circ \bar{c}_1}{dt}(0)$ se numeşte* aplicaţia diferenţială *a lui φ în x.*

Cum aplicaţia de mai sus a fost definită prin intermediul curbei $\bar{c}_1$, vom demonsta mai jos că definiţia nu depinde de curba respectivă.

In modelul aritmetic U_1 să considerăm curba $\bar{\alpha}_1(t) = (u^1(t), u^2(t))$, cu $\bar{c}_1 = \bar{r}_1 \circ \bar{\alpha}_1$, şi

$$\psi\left(u^1, u^2\right) = \left(\psi^1\left(u^1, u^2\right), \psi^2\left(u^1, u^2\right)\right).$$

In consecinţă, cum $\varphi \circ \bar{c}_1 = \bar{r}_2 \circ \psi \circ \bar{\alpha}_1$, să observăm că

$$\psi \circ \bar{\alpha}_1(t) = \left(v^1(t), v^2(t)\right).$$

Vom avea

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi \circ \bar{c}_1}{dt}(0) &= \frac{dv^1(0)}{dt}\bar{r}'_{2,v^1}(\varphi(x)) + \frac{dv^2(0)}{dt}\bar{r}'_{2,v^2}(\varphi(x)). \\
&= \frac{d\psi^1 \circ \bar{\alpha}_1(0)}{dt}\bar{r}'_{2,v^1}(\varphi(x)) + \frac{d\psi^2 \circ \bar{\alpha}_1(0)}{dt}\bar{r}'_{2,v^2}(\varphi(x)).
\end{aligned}$$

Dar

$$\begin{cases}
\frac{d\psi^1 \circ \bar{\alpha}_1(0)}{dt} = \frac{\partial \psi^1}{\partial u^1}(\bar{\alpha}_1(0))\frac{du^1}{dt}(0) + \frac{\partial \psi^1}{\partial u^2}(\bar{\alpha}_1(0))\frac{du^2}{dt}(0), \\
\frac{d\psi^2 \circ \bar{\alpha}_1(0)}{dt} = \frac{\partial \psi^2}{\partial u_1}(\bar{\alpha}_1(0))\frac{du_1}{dt}(0) + \frac{\partial \psi^2}{\partial u^2}(\bar{\alpha}_1(0))\frac{du^2}{dt}(0).
\end{cases}$$

Cum

$$\frac{d\bar{c}_1}{dt}(0) = \frac{du^1}{dt}(0)\,\bar{r}'_{1,u^1}(x) + \frac{du^2}{dt}(0)\,\bar{r}'_{1,u^2}(x),$$

observăm în fapt că matricea asociată lui $d\varphi_x$ în raport cu bazele $\left\{\bar{r}'_{1,u_1}(x), \bar{r}'_{1,v_1}(x)\right\}$ şi $\left\{\bar{r}'_{2,u_2}(\varphi(x)), \bar{r}'_{2,v_2}(\varphi(x))\right\}$ va fi

$$J\psi_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi^1}{\partial u^1}(\bar{\alpha}_1(0)) & \frac{\partial \psi^1}{\partial u^2}(\bar{\alpha}_1(0)) \\ \frac{\partial \psi^2}{\partial u^1}(\bar{\alpha}_1(0)) & \frac{\partial \psi^2}{\partial u^2}(\bar{\alpha}_1(0)) \end{pmatrix}$$

Aşadar $d\varphi_x$ este o aplicaţie liniară şi este descrisă utilizând coordonatele vectorului $\frac{d\bar{c}_1}{dt}(0)$. Deci dacă luăm o altă curbă $\tilde{c}_1$ cu $\tilde{c}_1(0) = x$ şi $\frac{d\tilde{c}_1}{dt}(0) = \frac{d\bar{c}_1}{dt}(0)$, atunci $d\varphi_x$ nu se modifică.

Observaţia 13 *Dacă înlocuim suprafaţa S_2 cu dreapta reală $\mathbf{R}$, având ca parametrizare aplicaţia identitate, avem definiţia aplicaţiei diferenţiale asociate unei funcţii reale $f : S \to \mathbf{R}$,*

$$df_x\left(\frac{d\bar{c}}{dt}(0)\right) = \frac{df \circ \bar{c}}{dt}(0).$$

Definiţia 20 *Aplicaţia φ se numeşte difeomorfism de suprafeţe dacă φ este homeomorfism iar φ şi φ^{-1} sunt diferenţiabile.*

Observaţia 14 *Cum $d\varphi_x$ se scrie cu ajutorul matricii Jacobi $J\psi_x$, cu ajutorul teoremei funcţiei inverse putem concluziona că φ este difeomorfism dacă φ este diferenţiabilă şi $d\varphi_x$ este izomorfism liniar.*

2.4 Prima formă fundamentală

Fie acum S o suprafaţă şi $(U, \bar{r})$ o parametrizare şi fie $x \in \bar{r}(U)$. Notăm

$$\begin{array}{l} E_x = \langle \bar{r}'_{u^1}(x), \bar{r}'_{u^1}(x) \rangle \\ F_x = \langle \bar{r}'_{u^1}(x), \bar{r}'_{u^2}(x) \rangle = \langle \bar{r}'_{u^2}(x), \bar{r}'_{u^1}(x) \rangle \\ G_x = \langle \bar{r}'_{u^2}(x), \bar{r}'_{u^2}(x) \rangle . \end{array}$$

In acest caz, dacă $\bar{u}$, $\bar{v} \in T_x S$, $\bar{u} = \alpha^1 \bar{r}'_{u^1}(x) + \alpha^2 \bar{r}'_{u^2}(x)$, $\bar{v} = \beta^1 \bar{r}'_{u^1}(x) + \beta^2 \bar{r}'_{u^2}(x)$, atunci

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \begin{pmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x & F_x \\ F_x & G_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \end{pmatrix}.$$

Definiţia 21 *Forma biliniară indusă în spaţiul $T_x S$ de către metrica euclidiană a spaţiului ambient $\mathbf{R}^3$ poartă numele de prima formă fundamentală.*

Notăm pe mai departe prima formă fundamentală cu Φ_1; aşadar $\Phi_1(\bar{u}, \bar{v}) = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$. Convenim de asemenea să notăm cu Δ_1 deterninantul matricii de mai sus.

Observaţia 15 *Din proprietăţile metricii euclidiene, va rezulta că prima formă fundamentală a suprafeţei S va fi simetrică, pozitiv definită şi nedegenerată. De asemenea, din formula lui Gram vom avea*

$$\Delta_1 = \left\| \bar{r}'_{u^1}(x) \times \bar{r}'_{u^2}(x) \right\|^2 .$$

Cu ajutorul primei forme fundamentale putem calcula lungimi de curbe simple definite pe suprafaţa S. Fie $\bar{c} : I \to S$ o curbă netedă. Vom avea, pentru orice $t_1 < t_2$, t_1, $t_2 \in I$

$$\begin{aligned} l(\bar{c})_{t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\bar{c}}{dt} \right\| dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left\langle \frac{d\bar{c}}{dt}, \frac{d\bar{c}}{dt} \right\rangle} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\Phi_1 \left(\frac{d\bar{c}}{dt}, \frac{d\bar{c}}{dt} \right)} dt. \end{aligned}$$

Mai departe, cu ajutorul primei forme fundamentale putem calcula aria unor porţiuni de suprafaţă incluse în domenii de parametrizare. Aşadar, dacă S este o suprafaţă şi $(U, \bar{r})$ o parametrizare, atunci considerăm aria domeniului $\bar{r}(U)$ cu ajutorul integralei

$$\mathcal{A}_{\bar{r}(U)} = \int_U \left\| \bar{r}'_{u^1} \times \bar{r}'_{u^2} \right\| du^1 du^2$$

Dar

$$\begin{aligned}
\left\|\bar{r}'_{u^1} \times \bar{r}'_{u^2}\right\| &= \sqrt{\Gamma\left(\bar{r}'_{u^1}, \bar{r}'_{u^2}\right)} \\
&= \left|\begin{array}{cc} \left\langle \bar{r}'_{u^1}, \bar{r}'_{u^1}\right\rangle & \left\langle \bar{r}'_{u^1}, \bar{r}'_{u^2}\right\rangle \\ \left\langle \bar{r}'_{u^2}, \bar{r}'_{u^1}\right\rangle & \left\langle \bar{r}_{u^2}, \bar{r}'_{u^2}\right\rangle \end{array}\right|^{1/2} \\
&= \sqrt{EG - F^2}.
\end{aligned}$$

Aşadar

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\bar{r}(U)} &= \int_U \sqrt{EG - F^2} du^1 du^2 \\
&= \int_U \sqrt{\Delta_1} du^1 du^2.
\end{aligned}$$

Observaţia 16 *Informaţiile geometrice legate de prima formă fundamentală se numesc proprietăţi* intrinseci. *Rezultă că lungimea unei curbe de pe suprafaţă şi aria unui anumit domeniu de pe aceeaşi suprafaţă sunt rezultate intrinseci.*

Definiţia 22 *Două suprafeţele S_1 şi S_2 se numesc* local izometrice *dacă există o aplicaţie $\varphi : S_1 \to S_2$ asfel încât pentru orice $x \in S_1$ există două parametrizări $(U_1, \bar{r}_1)$, $x \in \bar{r}_1(U_1)$ şi $(U_2, \bar{r}_2)$, $\varphi(x) \in \bar{r}_1(U_1)$ astfel încât $\varphi : U_1 \to U_2$ să fie o bijecţie şi pentru orice curbă $\bar{c} : I \to \bar{r}_1(U_1)$ să avem $l(\bar{c}) = l(\varphi(\bar{c}))$.*

Teorema 3 *Suprafeţele S_1 şi S_2 sunt local izometrice dacă şi numai dacă parametrizările $(U_1, \bar{r}_1)$ şi $(U_2, \bar{r}_2)$ pot fi alese astfel încât*

$$E_x = E_{\varphi(x)}, \quad F_x = F_{\varphi(x)}, \quad G_x = G_{\varphi(x)},$$

deci practic prima formă fundamentală a celor două suprafeţe se poate identifica prin intermediul lui φ.

Dem. Cum lungimea curbelor depinde de prima formă fundamentală, dacă cele două suprafeţe au local aceeaşi formă fundamentală, lungimile imaginilor curbelor prin izometria locală φ vor fi aceleaşi cu ale curbelor iniţiale.

Reciproc, dacă $x \in S_1$, $(U_1, \bar{r}_1)$ este o parametrizare locală, $x \in \bar{r}_1(U_1)$, $x = \bar{r}_1(u_0^1, u_0^2)$, iar $l(\bar{c}) = l(\varphi(\bar{c}))$ pentru orice curbă $\bar{c} : I \to \bar{r}_1(U_1)$, atunci fie $U_2 := U_1$ şi $\bar{r}_2 = \varphi \circ \bar{r}_1$ (eventual micşorăm pe $(U_1, \bar{r}_1)$ pentru ca $(U_1, \bar{r}_2)$ să fie parametrizare pe S_2). Atunci dacă $\bar{c}$ este curbă cu parametrizarea naturală cu $\bar{c}(0) = x$ şi $\varphi \circ \bar{c}$ va avea parametrizare naturală, deoarece

$$l(\bar{c})_{t_1}^{t_2} = t_2 - t_1 = l(\varphi \circ \bar{c})_{t_1}^{t_2}.$$

In consecinţă

$$\left\|\frac{d\bar{c}}{dt}\right\| = \left\|\frac{d\varphi \circ \bar{c}}{dt}\right\| = 1,$$

şi cum $\frac{d\varphi\circ\bar{c}}{dt}(0) = d\varphi_x\left(\frac{d\bar{c}}{dt}\right)(0)$, vom avea

$$\left\|\frac{d\bar{c}}{dt}(0)\right\| = \left\|d\varphi_x\left(\frac{d\bar{c}}{dt}(0)\right)\right\|.$$

Aşadar dacă $\bar{v} \in T_xS$, cu $\|\bar{v}\| = 1$, atunci considerând o curbă cu parametrizarea naturală astfel încât $\frac{d\bar{c}}{dt}(0) = \bar{v}$, obţinem

$$\|\bar{v}\| = \|d\varphi_x(\bar{v})\|. \tag{2.1}$$

Cum aplicaţia $d\varphi_x$ este liniară, vom avea

$$\begin{aligned}\|\alpha\bar{v}\| &= \alpha\|\bar{v}\| \\ &= \alpha\|d\varphi_x(\bar{v})\| \\ &= \|d\varphi_x(\alpha\bar{v})\|,\end{aligned}$$

şi deci relaţia (2.1) se menţine pentru $\bar{v} \in T_xS$. Cum pentru orice $\bar{v}$, $\bar{u} \in T_xS$ avem

$$\langle\bar{u},\bar{v}\rangle = \frac{1}{2}\left(\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 - \|\bar{u}\|^2 - \|\bar{v}\|^2\right),$$

va rezulta

$$\langle\bar{u},\bar{v}\rangle = \langle d\varphi_x(\bar{u}), d\varphi_x(\bar{v})\rangle,$$

şi deci prima formă fundamentală se păstrează

$$\Phi_1(\bar{u},\bar{v}) = \Phi_1(d\varphi_x(\bar{u}), d\varphi_x(\bar{v})).$$

Alegând acum curbele locale $\bar{\alpha}_{u^1}$, $\bar{\alpha}_{u^2} : (-\varepsilon,\varepsilon) \to U_1$, definite după regula

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_{u^1}(t) &:= \left(u_0^1 + t, u_0^2\right), \\ \bar{\alpha}_{u^2}(t) &:= \left(u_0^1, u_0^2 + t\right),\end{aligned}$$

şi curbele corespondente pe suprafeţe

$$\begin{aligned}\bar{c}_{1,u^1} &= \bar{r}_1 \circ \bar{\alpha}_{u^1}, \quad \bar{c}_{2,u^1} = \varphi \circ \bar{c}_{1,u^1}, \\ \bar{c}_{1,u^2} &= \bar{r}_1 \circ \bar{\alpha}_{u^2}, \quad \bar{c}_{2,u^2} = \varphi \circ \bar{c}_{1,u^2},\end{aligned}$$

vom obţine

$$\begin{aligned}\bar{r}'_{1,u^1}(x) &= \frac{d\bar{c}_{1,u^1}}{dt}(0), \quad \bar{r}'_{2,u^1}(x) = \frac{d\varphi\circ\bar{c}_{1,u}}{dt}(0) = d\varphi_x\left(\bar{r}'_{1,u^1}(x)\right), \\ \bar{r}'_{1,u^2}(x) &= \frac{d\bar{c}_{1,u^2}}{dt}(0), \quad \bar{r}'_{2,u^2}(x) = \frac{d\varphi\circ\bar{c}_{1,v}}{dt}(0) = d\varphi_x\left(\bar{r}'_{1,u^2}(x)\right).\end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned}E_x &= \langle\bar{r}_{1,u}(x), \bar{r}_{1,u}(x)\rangle \\ &= \langle d\varphi_x(\bar{r}_{1,u}(x)), d\varphi_x(\bar{r}_{1,v}(x))\rangle \\ &= \langle\bar{r}_{2,u}(\varphi(x)), \bar{r}_{2,u}(\varphi(x))\rangle \\ &= E_{\varphi(x)}.\end{aligned}$$

In mod analog se obţine $F_x = F_{\varphi(x)}$, $G_x = G_{\varphi(x)}$.

Observaţia 17 y

2.5 A doua formă fundamentală a unei suprafeţe

Fie S o suprafaţă şi $(U, \bar{r})$ o parametrizare. Cum aplicaţia $\bar{r} : U \to \bar{r}(U)$ este neteda, putem considera funcţiile vectoriale definite pe U, $\bar{r}'_u(u,v) := \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}(u,v)$, $\bar{r}'_v(u,v) := \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}(u,v)$ ce asociază fiecărui punct de pe U vectorul respectiv (câmp vectorial). In consecinţă putem deriva în continuare şi o putem considera vectorii $\bar{r}''_{u,u} := \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^2}(u,v)$, precum şi celelalte combinaţii de u şi v.

Cum în general $\bar{r}''_{u,u}(x) \notin T_x S$, considerăm vectorul normal

$$\bar{N}(x) := \frac{\bar{r}'_u(x) \times \bar{r}'_v(x)}{\|\bar{r}'_u(x) \times \bar{r}'_v(x)\|},$$

putem defini

$$\begin{aligned} L_x &:= \left\langle \bar{N}(x), \bar{r}''_{u,u} \right\rangle, \\ M_x &:= \left\langle \bar{N}(x), \bar{r}''_{u,v} \right\rangle \\ &= \left\langle \bar{N}(x), \bar{r}''_{v,u} \right\rangle, \\ N_x &:= \left\langle \bar{N}(x), \bar{r}''_{v,v} \right\rangle, \end{aligned}$$

în relaţia din mijloc am folosit lema lui Schwarz.

Definiţia 23 *Forma biliniară definită în $T_x S$ cu ajutorul coeficienţilor L_x, M_x şi N_x se numeşte a doua formă fundamentală.*

Vom nota a doua formă fundamentală cu Φ_2.

Observaţia 18 *Dacă $\bar{v}_1 = \alpha^1 \bar{r}'_u(x) + \alpha^2 \bar{r}'_v(x)$, $\bar{v}_2 = \beta^1 \bar{r}'_u(x) + \beta^2 \bar{r}'_v(x)$, atunci*

$$\Phi_2(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \begin{pmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_x & M_x \\ M_x & N_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \end{pmatrix}.$$

Intr-un punct arbitrar $x \in S$ vom avea $\left\|\bar{N}_x\right\| = 1$, deci putem defini aplicaţia lui Gauss

$$\bar{N} : \bar{r}(U) \to S^2,$$

unde S^2 reprezintă sfera unitate din R^3.

Vom studia în cele ce urmează aplicaţia diferenţială

$$d\bar{N}_x : T_x S \to T_x S^2.$$

Observaţia 19 *Să reamintim faptul că dacă $\bar{v} \in T_x S$, iar $\bar{c} : I \to S$ astfel încât $\bar{c}(0) = x$ iar $\frac{d\bar{c}(t)}{dt}(0) = \bar{v}$, atunci*

$$d\bar{N}_x(\bar{v}) = \frac{d\bar{N}(\bar{c}(t))}{dt}(0).$$

Cum $\left\| \bar{N}\left(\bar{c}\left(t\right)\right) \right\| = 1$, *vom avea* $\bar{N}\left(x\right) \perp \frac{d\bar{N}(\bar{c}(t))}{dt}\left(0\right)$; *dar* $\bar{v} \in T_x S$ *a fost considerat arbitrar, deci*

$$\bar{N}\left(x\right) \perp T_x S^2.$$

Pe de altă parte $\bar{N}\left(x\right) \perp T_x S$, *deci* $T_x S \parallel T_x S^2$ *şi considerând vectori liberi putem identifica pe mai departe cele două plane, deci putem considera*

$$d\bar{N}_x : T_x S \to T_x S.$$

Vom demonstra că.

$$\Phi_2\left(\bar{v}_1, \bar{v}_2\right) = -\left\langle d\bar{N}_x\left(\bar{v}_1\right), \bar{v}_2 \right\rangle \tag{2.2}$$

Pentru cazul $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{r}'_u\left(x\right)$ avem

$$\left\langle \bar{N}\left(x\right), \bar{r}'_u\left(x\right) \right\rangle = 0,$$

deoarece $\bar{N}\left(x\right) \perp T_x S$; derivând parţial în variabila u vom obţine

$$\left\langle \bar{N}'_u\left(x\right), \bar{r}'_u\left(x\right) \right\rangle + \left\langle \bar{N}\left(x\right), \bar{r}''_{uu}\left(x\right) \right\rangle = 0,$$

deci

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{N}\left(x\right), \bar{r}''_{uu}\left(x\right) \right\rangle &= -\left\langle \bar{N}'_u\left(x\right), \bar{r}'_u\left(x\right) \right\rangle \\ &= -\left\langle d\bar{N}_x\left(\bar{r}'_u\left(x\right)\right), \bar{r}'_u\left(x\right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Analog pentru toate combinaţiile u şi v. Cum relaţia (2.2) este verificată pentru vectorii din baza $\{\bar{r}'_u\left(x\right), \bar{r}'_v\left(x\right)\}$, prin liniaritate vom obţine (2.2) pentru orice $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2 \in T_x S$.

Definiţia 24 *Operatorul* $d\bar{N}_x : T_x S \to T_x S$ *se notează cu* A_x *şi se numeşte operatorul fundamental asociat suprafeţei.*

Observaţia 20 *Vom avea aşadar*

$$\left\langle A_x\left(\bar{v}_1\right), \bar{v}_2 \right\rangle = -\Phi_2\left(\bar{v}_1, \bar{v}_2\right)$$

pentru orice $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2 \in T_x S$.

Fie $\bar{c} : I \to S$, $\bar{c}\left(0\right) = x$, $\frac{d\bar{c}(t)}{dt}\left(0\right) = \bar{v} \in T_x S$. Să considerăm deasemenea versorul normal $\bar{\nu}\left(x\right)$ al curbei $\bar{c}$ în x şi fie θ unghiul dintre vectorii $\bar{N}\left(x\right)$ şi $\bar{\nu}\left(x\right)$.

Definiţia 25 *Mărimea* $k_n\left(x\right) := \left\langle \bar{N}\left(x\right), k_1\left(x\right)\bar{\nu}\left(x\right) \right\rangle = k_1\left(x\right)\cos\theta$ *se numeşte curbura normală a curbei* $\bar{c}$ *în* x.

Fie acum o parametrizare naturală a curbei $\bar{c}$; vom avea

$$\frac{d^2\bar{c}\,(s)}{ds^2}\,(0) = k_1\,(x)\,\bar{\nu}\,(x)\,.$$

Atunci

$$\begin{aligned} k_n\,(x) &= \left\langle \bar{N}\,(x)\,, \frac{d^2\bar{c}\,(s)}{ds^2}\,(0)\right\rangle \\ &= -\left\langle d\bar{N}_x\left(\frac{d\bar{c}\,(s)}{ds}\,(0)\right), \frac{d\bar{c}\,(s)}{ds}\,(0)\right\rangle \\ &= -\left\langle A_x\left(\frac{d\bar{c}\,(s)}{ds}\,(0)\right), \frac{d\bar{c}\,(s)}{ds}\,(0)\right\rangle. \end{aligned}$$

Observaţia 21 *Aşadar vom avea*

$$\begin{aligned} k_n\,(x) &= \Phi_2\left(\frac{d\bar{c}\,(s)}{ds}\,(0)\,, \frac{d\bar{c}\,(s)}{ds}\,(0)\right) \\ &= \Phi_2\left(\frac{\frac{d\bar{c}(t)}{dt}\,(0)}{\left\|\frac{d\bar{c}(t)}{dt}\,(0)\right\|}, \frac{\frac{d\bar{c}(t)}{dt}\,(0)}{\left\|\frac{d\bar{c}(t)}{dt}\,(0)\right\|}\right) \\ &= \frac{\Phi_2\left(\frac{d\bar{c}(t)}{dt}\,(0)\,, \frac{d\bar{c}(t)}{dt}\,(0)\right)}{\Phi_1\left(\frac{d\bar{c}(t)}{dt}\,(0)\,, \frac{d\bar{c}(t)}{dt}\,(0)\right)}. \end{aligned}$$

Observaţia 22 *Cum $k_n\,(x)$ depinde doar de versorul $\frac{d\bar{c}(s)}{ds}\,(0)$, fie π planul determinat de punctul $x \in S$ şi vectorii $\bar{N}_x$, $\bar{v} \in T_xS$, şi putem considera curba $\bar{c}$ ca intersecţia $S \cap \pi$ în jurul punctului x, cu parametrizare locală. In aceste condiţii*

$$\begin{aligned} |k_n\,(x)| &= \left|\left\langle \bar{N}_x, k_1\,(x)\,\bar{\nu}\,(x)\right\rangle\right| \\ &= |k_1\,(x)\cos\theta|\,, \end{aligned}$$

şi cum θ este 0 sau π, va rezulta $|k_n\,(x)| = k_1\,(x)$.

Vom studia în cele ce urmează curbura nomală. Plecăm de la relaţia

$$k_n\,(x) = -\left\langle A_x\left(\frac{d\bar{c}\,(s)}{ds}\,(0)\right), \frac{d\bar{c}\,(s)}{ds}\,(0)\right\rangle.$$

Să studiem valoarea expresiei $-\langle A_x\,(\bar{v})\,,(\bar{v})\rangle$, cu $\bar{v} \in T_xS$, $\|(\bar{v})\| = 1$. Cum operatorul A_x este simetric, fie λ_1, λ_2 -valorime sale proprii şi fie $\{\bar{e}_{1,}\bar{e}_2\}$ o bază orthonormată formată din vectori proprii.

Bibliografie

[Orn] L. Ornea, O introducere în geometria diferen ţial ă, Editura Theta, Bucureşti, 2015 J.A. Álvarez

[Mur] Gh. Murărescu, Geometrie diferenţială -Curs, Reprografia Universităţii din Craiova, 1998

[do Car] M. P. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976.