Geometria diferenţială a curbelor
Suport de studiu pentru seminar

Mihaela Sterpu

Cuprins

Seminarul 1

Curbe parametrizate

1.1 Exerciţii rezolvate

E 1.1 *Se consideră curbele parametrizate*

$$(I, \bar{\mathbf{r}}) = \bar{\mathbf{r}}(t), I = (-\pi, \pi),\ \bar{\mathbf{r}}(t) = (a\cos t, a\sin t),$$

şi

$$(J, \bar{\rho}) = \bar{\boldsymbol{\rho}}\,(t)\,, J = \mathbf{R},\ \bar{\boldsymbol{\rho}}(u) = \left(a\frac{1-u^2}{1+u^2}, a\frac{2u}{1+u^2}\right).$$

Să se arate că $\bar{\mathbf{r}}$ *şi* $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ *sunt parametrizări local echivalente ale cercului* $\Gamma : x^2 + y^2 = a^2$.

Soluţie. Funcţia $\lambda : (-\pi, \pi) \to \mathbf{R}$, $\lambda(t) = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$ este difeomorfism (de clasă C^∞) şi are loc identitatea $\bar{\boldsymbol{\rho}}(\lambda(t)) = \bar{\mathbf{r}}(t)$. Cum $(a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 = a^2$, pentru orice $t \in I$, şi $\left(a\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2 + \left(a\frac{2u}{1+u^2}\right)^2 = a^2$, pentru orice $u \in \mathbf{R}$, deducem $\operatorname{Im}(\bar{\mathbf{r}}) \subset \Gamma$, $\operatorname{Im}(\bar{\boldsymbol{\rho}}) \subset \Gamma$.

E 1.2 *Să se arate că funcţiile vectoriale*

$$\begin{aligned} r_1 &: (0, 2\pi) \to \mathbf{R},\ r_1(t) = (\cos t, \sin t), \\ r_2 &: (0, 2\pi) \to \mathbf{R},\ r_2(t) = (\cos t^2, \sin t^2), \end{aligned}$$

sunt parameterizări locale ale cercului Γ *care are centrul* $\hat{\imath}$*n origine şi raza egală cu* 1. *Sunt aceste două parameterizări locale echivalente?*

Soluţie. Evident, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, $\cos^2 t^2 + \sin^2 t^2 = 1$, entru orice $t \in (0, 2\pi)$. Parametrizările nu sunt echivalente. Într-adevăr, să presupunem că există un difeomorfism $\lambda : (0, 2\pi) \to (0, 2\pi)$, astfel încât $\bar{\mathbf{r}}_2(\lambda(t)) = \bar{\mathbf{r}}_1(t)$, pentru orice $t \in (0, 2\pi)$. Deducem că $\lambda(t) = \sqrt{t}$. Însă λ nu este surjectivă, contradicţie cu presupunerea făcută.

E 1.3 *Fie* $\bar{\mathbf{r}}_0$, $\bar{\mathbf{m}} \in \vec{\mathbf{R}}^3$ *şi d dreapta care trece prin punctul* $M(\bar{\mathbf{r}}_0)$ *şi are vectorul director* $\bar{\mathbf{m}}$. *Parametrizările*

$$\bar{\mathbf{r}}_1(t) = \bar{\mathbf{r}}_0 + t\bar{\mathbf{m}}, t \in \mathbf{R},$$

şi

$$\bar{\mathbf{r}}_2(t) = \bar{\mathbf{r}}_0 + t^2\bar{\mathbf{m}}, t \in \mathbf{R},$$

ale dreptei d sunt echivalente?

Soluţie. Parametrizările nu sunt echivalente. Într-adevăr, să presupunem că există un difeomorfism $\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, astfel încât $\bar{\mathbf{r}}_1(\lambda(t)) = \bar{\mathbf{r}}_2(t)$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$. Deducem că $\lambda(t) = t^2$ Însă λ nu este bijectivă, contradicţie cu presupunerea făcută.

E 1.4 *Să se stabilească dacă următoarele curbe sunt regulate şi simple*

a) $\bar{\mathbf{r}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $\bar{\mathbf{r}}(t) = (3t - t^2, 3t^2, 3t + t^3)$

b) $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 - z = 0\}$.

Soluţie. a) Avem

$$\bar{\mathbf{r}}'(t) = \left(3 - 2t, 6t, 3 + 3t^2\right)$$

şi $\bar{\mathbf{r}}'(t) \neq \bar{\mathbf{0}}$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$, deci parametrizarea $\bar{\mathbf{r}}$ este regulată. Cum $\bar{\mathbf{r}}$ este injectivă, rezultă că $\bar{\mathbf{r}}(\mathbf{R})$ este o curbă regulată şi simplă.

b) Funcţiile $F_1, F_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, F_2(x, y, z) = y^2 + z^2 - z$$

sunt netede. Matricea Jacobiană asociată

$$J(M) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 2y & 2z - 1 \end{pmatrix}(M)$$

are rangul 2 pentru orice $M \in C$, cu excepţia punctului $M_0(0, 0, 1) \in C$. Mulţimea C nu este deci o curbă simplă, ci o reuniune de curbe simple, cu M_0 punct singular.

E 1.5 *Fie* $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *definită prin* $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$, $(a > 0)$, *de clasă* C^∞.

a) *Reprezintă* $F(x, y) = 0$ *o curbă geometrică* Γ *simplă, dată implicit?*

b) *Să se arate că* $x(t) = \frac{3at}{1+t^3}$, $y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}$ *este o reprezentare parametrică a curbei* Γ. *(Curba* Γ *este numită foliul lui Descartes).*

Soluţie. a) Din

$$\overline{\text{grad}}F = (3x^2 - 3ay, 3y^2 - 3ax),$$

rezultă că $\overline{\text{grad}}F(0,0) = (0,0)$. Pentru $x \neq 0$ sau pentru $y \neq 0$ avem $\overline{\text{grad}}F \neq \bar{0}$.

b) Da prin verificare; curba generală este reuniune de curbe simple, cu $O-$ originea care este punct dublu.

E 1.6 *Se consideră curba plană* Γ *definită prin parametrizarea* $\bar{\mathbf{r}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$,

$$\bar{\mathbf{r}}\,(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)) \,.$$

a) Să se determine o parametrizare naturală a curbei Γ.

b) Să se calculeze lungimea arcului curbei Γ *de la punctul* $t = 0$ *la punctul* $t = 2\pi$. *(Curba se numeşte cicloidă).*

Soluţie. a) Avem

$$\bar{\mathbf{r}}' = (a\,(1 - \cos t)\,, a \sin t)$$

şi

$$s(t) = \int_0^t |\bar{\mathbf{r}}'|\, dt = \int_0^t a\sqrt{2(1 - \cos t)}dt = -4a \cos \frac{t}{2} + 4a.$$

Deducem

$$t(s) = 2 \arccos \left(1 - \frac{s}{4a}\right),$$

iar parametrizarea naturală este $\bar{\boldsymbol{\rho}}(s) = \bar{\mathbf{r}}(t(s))$.

b) Avem

$$l_0^{2\pi}\,(\Gamma) = \int_0^{2\pi} |\bar{\mathbf{r}}'|\, dt = \int_0^{2\pi} a\sqrt{2(1 - \cos t)}dt = 8a.$$

E 1.7 *Să se calculeze lungimea arcului unei bucle a curbei* Γ *definită prin parametrizarea* $\bar{\mathbf{r}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$

$$\bar{\mathbf{r}}\,(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t), 4a \cos \frac{t}{2})$$

extremităţile buclei fiind situate în planul $y = 0$.

Soluţie. Avem

$$\bar{\mathbf{r}}'(t) = \left(a(1-\cos t), a\sin t, -2a\sin\frac{1}{2}t\right)$$

şi

$$|\bar{\mathbf{r}}'(t)| = a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t + 4\sin^2\frac{1}{2}t} = 2\sqrt{2}a\left|\sin\frac{t}{2}\right|.$$

Coordonatele curbilinii t_1, t_2 ale extremităţilor unei bucle sunt soluţii consecutive ale ecuaţiei $a(1-\cos t)$, deci putem considera $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$. Rezultă

$$l_0^{2\pi}(\Gamma) = \int_0^{2\pi} |\bar{\mathbf{r}}'|\, dt = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}a\left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = 8\sqrt{2}a.$$

E 1.8 *Să se calculeze lungimea curbei plane închise* Γ *definită prin parametrizarea*

$$\bar{\mathbf{r}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, \bar{\mathbf{r}}(t) = \left(a\cos^3 t,\ a\sin^3 t\right).$$

(Curba se numeşte astroidă).

Soluţie. Avem

$$\bar{\mathbf{r}}'(t) = \left(-3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t\right)$$

şi

$$|\bar{\mathbf{r}}'(t)| = 3a|\cos t\sin t|.$$

Cum $\bar{\mathbf{r}}(t+2k\pi) = \bar{\mathbf{r}}(t)$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$, funcţia $\bar{\mathbf{r}}$ este periodică de perioadă principală 2π. Considerăm $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$. Lungimea curbei este

$$l_{t_2}^{t_1}(\Gamma) = 4\int_0^{\pi/2} 3a\cos t\sin t dt = 6a.$$

E 1.9 *Să se calculeze lungimea curbei închise* Γ *definită prin parametrizarea* $\bar{\mathbf{r}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$,

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t, a\cos 2t).$$

Soluţie. Avem

$$\bar{\mathbf{r}}'(t) = \left(-3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t, -2a\sin 2t\right)$$

şi

$$|\bar{\mathbf{r}}'(t)| = 5a|\sin t\cos t|.$$

Cum $\bar{\mathbf{r}}(t+2k\pi) = \bar{\mathbf{r}}(t)$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$, funcţia $\bar{\mathbf{r}}$ este periodică de perioadă principală 2π. Considerăm $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$. Lungimea curbei este

$$l_{t_2}^{t_1}(\Gamma) = 4\int_0^{\pi/2} 5a\cos t\sin t dt = 10a.$$

E 1.10 *Se consideră elicea circulară* Γ *definită de parametrizarea* $\bar{\mathbf{r}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$,

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt),$$

cu a, b *constante reale nenule.*

a) *Să se determine o reprezentare parametrică naturală a elicei* Γ.

b) *Să se calculeze lungimea unei spire a elicei* Γ $(t \in [0, 2\pi])$.

Soluţie. a) Avem

$$\bar{\mathbf{r}}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b), |\bar{\mathbf{r}}'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$$

şi

$$s(t) = \int_0^t |\bar{\mathbf{r}}'(t)|\, dt = t\sqrt{a^2+b^2}.$$

O parametrizare naturală este $\bar{\boldsymbol{\rho}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$,

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

b) $l_{t_2}^{t_1}(\Gamma) = \int_0^{2\pi} |\bar{\mathbf{r}}'(t)| = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$.

1.2 Exerciţii propuse

E 1.11 *Să se arate că parametrizările*

$$\bar{\mathbf{r}} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}^3, \bar{\mathbf{r}}(t) = (a\cos t, b\sin t, ct),$$

şi

$$\bar{\boldsymbol{\rho}} : (-1, 1) \to \mathbf{R}^3,\ \bar{\boldsymbol{\rho}}(u) = \left(a\frac{1-u^2}{1+u^2}, b\frac{2u}{1+u^2}, 2c\,\mathrm{arctg}\, u\right),$$

sunt echivalente.

E 1.12 *Să se studieze intersecţia dintre paraboloidul hiperbolic* $x^2 - y^2 + z = 0$ *şi paraboloidul eliptic de rotaţie* $x^2 + y^2 + 3z = 0$.

E 1.13 *Să se arate că curba lui Viviani dată ca intersecţia dintre sfera* $x^2+y^2+z^2-a^2 = 0$, $a \neq 0$, *şi cilindrul* $x^2 + y^2 - ay = 0$, *este o reuniune de două curbe simple şi punctul* $B(0, a, 0)$ *care este un punct dublu (nod).*

E 1.14 *Să se calculeze lungimea arcului curbei plane* Γ *definită prin parametrizarea*

$$\bar{\mathbf{r}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, \bar{\mathbf{r}}\,(t) = (x(t), y(t)),$$

unde

$$\begin{aligned} x\,(t) &= (1-\lambda)a\cos\lambda t + \lambda a\cos(\lambda - 1)t, \\ y\,(t) &= (1-\lambda)a\sin\lambda t + \lambda a\sin(\lambda - 1)t, \end{aligned}$$

între punctele $t_1 = 0,\ t_2 = 2\pi$. *(Curba se numeşte hipocicloidă).*

E 1.15 *Să se calculeze lungimea arcului curbei plane* Γ *definită prin parametrizarea*

$$\bar{\mathbf{r}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, \bar{\mathbf{r}}\,(t) = (x(t), y(t)),$$

unde

$$\begin{aligned} x\,(t) &= (1+\lambda)a\cos\lambda t - \lambda a\cos(\lambda + 1)t, \\ y\,(t) &= (1+\lambda)a\sin\lambda t - \lambda a\sin(\lambda + 1)t, \end{aligned}$$

între punctele $t_1 = 0,\ t_2 = 2\pi$. *(Curba se numeşte epicicloidă).*

E 1.16 *Să se determine lungimea arcului determinat de punctele* $P\,(2,1,0)$ *şi* $Q\,(4,4,\ln 2)$ *pe curba* Γ *definită prin parametrizarea*

$$\bar{\mathbf{r}} : (0,\infty) \to \mathbf{R}^3, \bar{\mathbf{r}}(t) = \left(2t, t^2, \ln t\right).$$

E 1.17 *Să se calculeze lungimea arcului cuprins între planele* $z = \frac{a}{6}$, $z = \frac{a}{3}$, *al curbei* Γ *definită prin intersecţia suprafeţelor*

$$x^3 - a^2 y = 0, 6xz - a^2 = 0, a \neq 0.$$

Seminarul 2

Dreapta tangentă. Plan osculator. Curbura

2.1 Exerciţii rezolvate

E 2.1 *Se consideră elicea circulară* Γ *definită de parametrizarea*

$$\bar{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3, \bar{\mathbf{r}}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt),$$

cu a, b *constante reale nenule.*

a) *Să se scrie ecuaţiile dreptei tangentă la elice în punctul curent.*

b) *Să se arate că tangentele la elice fac un unghi constant cu generatoarele suprafeţei cilindrice pe care este situată elicea.*

c) *Să se calculeze curbura elicei.*

d) *Să se scrie ecuaţia planului osculator în punctul curent.*

Soluţie. a) Ecuaţiile dreptei tangentă sunt

$$\frac{x - a\cos t}{-a \sin t} = \frac{y - a \sin t}{a \cos t} = \frac{z - bt}{b}.$$

b) Elicea este situată pe cilindrul definit de ecuaţia $x^2 + y^2 = a^2$. Generatoarele elicei sunt paralele cu axa Oz, deci au vectorul director $\bar{e}_3$. Tangenta la elice în punctul $\bar{r}(t)$ are vectorul director

$$\bar{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b).$$

Rezultă

$$\cos\left(\widehat{\bar{r}'(t),\bar{e}_3}\right) = \frac{<\bar{r}'(t),\bar{e}_3>}{|\bar{r}'(t)|\cdot|\bar{e}_3|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

c) Avem $\bar{r}''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$,

$$\begin{aligned}\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} \\ &= \bar{e}_1 ba\sin t + a^2\bar{e}_3 - \bar{e}_2 ab\cos t,\end{aligned}$$

deci

$$k_1(t) = \frac{\sqrt{a^2b^2+a^4}}{\sqrt{a^2+b^2}^3} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

d) Planul osculator în punctul $\bar{r}(t)$ are vectorii directori $\bar{r}'(t)$, $\bar{r}''(t)$. Ecuaţia acestui plan se scrie

$$\begin{vmatrix} x-a\cos t & y-a\sin t & z-bt \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sau, echivalent,

$$ab\,(\sin t)\,x - ab\,(\cos t)\,y + a^2z - a^2bt = 0.$$

E 2.2 *Să se scrie ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal la curba* Γ *definită prin reprezentarea implicită*

$$y = x^2, x^3z = 1,$$

în punctul $P(1,1,1)$.

Soluţie. Funcţiile

$$F_1, F_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, F_1(x,y,z) = x^2 - y, F_2(x,y,z) = x^3z - 1$$

sunt netede. Matricea Jacobiană asociată în punctul P,

$$J\,(P) = \begin{pmatrix} 3x^2 & -a^2 & 0 \\ 6z & 0 & 6x \end{pmatrix}_{|(1,1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

are rangul 2. Deci Γ este o curbă simplă şi regulată într-o vecinătate a punctului P. Ecuaţiile dreptei tangente în punctul P la Γ sunt

$$\frac{x-1}{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y-1}{-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z-1}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}},$$

sau, echivalent,

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}.$$

Planul normal la curba Γ în punctul P are ecuaţia

$$-1 \cdot (x-1) - 2 \cdot (y-1) + 3(z-1) = 0,$$

sau, echivalent $-x - 2y + 3z = 0$.

E 2.3 *Fie curba* Γ *definită prin parametrizarea*

$$\bar{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3, \bar{\mathbf{r}}(t) = (1 + t^3, t^2 + t^3, 5t^3 + 2t^2 + 2).$$

Să se arate că Γ *este o curbă simplă, plană şi să se găsească planul curbei.*

Soluţie. Se verifică imediat că $\bar{r}$ este o funcţie injectivă, deci Γ este o curbă simplă. Avem

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}'(t) &= \left(3t^2, 2t + 3t^2, 15t^2 + 4t\right), \\ \bar{\mathbf{r}}''(t) &= (6t, 2 + 6t, 30t + 4) \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}'(t) \times \bar{\mathbf{r}}''(t) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3t^2 & 2t + 3t^2 & 15t^2 + 4t \\ 6t & 2 + 6t & 30t + 4 \end{vmatrix} \\ &= 18t^2\bar{e}_1 + 12t^2\bar{e}_2 - 6t^2\bar{e}_3. \end{aligned}$$

Parametrizarea $\bar{r}$ nu este regulată în punctul $t = 0$. Ecuaţia planului osculator la curba Γ în punctul $\bar{r}(t),\ t \neq 0$, se scrie

$$18t^2(x - 1 - t^3) + 12t^2(y - t^2 - t^3) - 6t^2(z - 5t^3 - 2t^2 - 2) = 0$$

sau, echivalent, $18x + 12y - 6z - 6 = 0$. Curba Γ este inclusă în planul

$$3x + 2y - z - 1 = 0.$$

E 2.4 *Se consideră o curbă plană* $(I, r) = \bar{r}\,(t)$ *, definită prin parametrizarea*

$$\bar{r} : I \to \mathbf{R}^2, \bar{\mathbf{r}}(t) = (x(t), y(t)).$$

Să se demonstreze că $k_1(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}$.

Soluţie. Considerăm curba $\left(\tilde{I}, \tilde{r}\right) = \tilde{r}\,(t)$, definită prin parametrizarea

$$\tilde{r} : I \to \mathbf{R}^2, \tilde{\mathbf{r}}(t) = (x(t), y(t), 0).$$

Cum

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}'(t) &= (x'(t), y'(t), 0), \\ \tilde{\mathbf{r}}''(t) &= (x''(t), y''(t), 0) \end{aligned}$$

şi

$$\tilde{\mathbf{r}}'(t) \times \tilde{\mathbf{r}}''(t) = (0, 0, x'y'' - x''y),$$

deducem

$$\tilde{k}_1(t) = k_1(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}.$$

E 2.5 *Fie* Γ *curba plană definită de graficul funcţiei* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. *Să se calculeze curbura curbei* Γ.

Soluţie. Considerăm parametrizarea

$$\mathbf{r} : (a, b) \to \mathbf{R}^2, \bar{\mathbf{r}}\,(t) = (t, f\,(t)).$$

Avem $\bar{\mathbf{r}}'\,(t) = (1, f')$, $\bar{\mathbf{r}}''\,(t) = (0, f'')$. Aplicând 2.4, deducem

$$k_1(t) = \frac{|f''|}{\left(1 + (f')^2\right)^{3/2}}.$$

E 2.6 *Să se calculeze curbura cicloidei* Γ *definită de parametrizarea*

$$\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, \bar{\mathbf{r}}\,(t) = (x(t), y(t)),$$

unde $x\,(t) = a(t - \sin t)$, $y\,(t) = a(1 - \cos t))$.

Soluţie. Avem

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{r}}'(t) &= (a(1-\cos t), a\sin t),\\ \bar{\mathbf{r}}''(t) &= (a\sin t, a\cos t).\end{aligned}$$

Aplicând 2.4, deducem

$$k_1(t) = \frac{a^2\left|(1-\cos t)\cos t - \sin^2 t\right|}{\left(a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\right)^3} = \frac{1}{2a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}} = \frac{1}{4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}.$$

E 2.7 *Să se calculeze curbura hipocicloidei* Γ *definită de parametrizarea*

$$\mathbf{r}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2, \bar{\mathbf{r}}(t) = (x(t), y(t)),$$

unde

$$\begin{aligned}x(t) &= (1-\lambda)a\cos\lambda t + \lambda a\cos(\lambda-1)t,\\ y(t) &= (1-\lambda)a\sin\lambda t + \lambda a\sin(\lambda-1)t.\end{aligned}$$

E 2.8 *Să se calculeze curbura elipsei* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$.

Soluţie. Considerăm parametrizarea

$$\mathbf{r}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2, \bar{\mathbf{r}}(t) = (a\cos t, b\sin t).$$

Aplicând 2.4, deducem

$$k_1(t) = \frac{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}} = \frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}.$$

În cazul $a=b$, se regăseşte curbura cercului de rază a, $k_1(t)=\frac{1}{a}$.

2.2 Exerciţii propuse

E 2.9 *Fie curba* Γ *definită prin parametrizarea*

$$\bar{r}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3, \bar{\mathbf{r}}(t) = (2t^3+t^2, t^2-2t, t^3+t-1).$$

Să se arate că Γ *este o curbă plană şi să se găsească planul curbei.*

E 2.10 *Să se arate că dacă planul osculator al unei curbe trece printr-un punct fix sau este staţionar atunci curba este plană.*

E 2.11 *Să se calculeze curbura astroidei* Γ *definită de parametrizarea*

$$\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, \bar{\mathbf{r}}\,(t) = (x(t), y(t)),$$

unde $x\,(t) = a\cos^3 t,\ y\,(t) = a\sin^3 t.$

E 2.12 *Să se calculeze curbura epicicloidei* Γ *definită de parametrizarea*

$$\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, \bar{\mathbf{r}}\,(t) = (x(t), y(t)),$$

unde

$$\begin{aligned} x\,(t) &= (1+\lambda)a\cos\lambda t - \lambda a\cos(\lambda+1)t, \\ y\,(t) &= (1+\lambda)a\sin\lambda t - \lambda a\sin(\lambda+1)t. \end{aligned}$$

E 2.13 *Să se calculeze curbura tractricei* Γ *definită de parametrizarea*

$$\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, \bar{\mathbf{r}}\,(t) = (x(t), y(t)),$$

unde

$$x\,(t) = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\tfrac{t}{2}\right),\ \ y\,(t) = a\sin t.$$

E 2.14 *Să se calculeze curbura hiperbolei* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$

E 2.15 *Să se calculeze curbura parabolei* $y^2 = 2px.$

E 2.16 *Fie* Γ *curba definită de graficul funcţiei* $f : (a,b) \to \mathbf{R}$. *Să se calculeze curbura curbei* Γ.

Seminarul 3

Reper Frenet

3.1 Exerciţii rezolvate

E 3.1 *Se dă curba* Γ *prin parametrizarea*

$$\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3, \bar{\mathbf{r}}\,(t) = (\cos t, \sin t, 3t).$$

Se cere:

a) *Să se determine o parametrizare naturală.*

b) *Să se determine axele (ca drepte) reperului Frenet pentru punctul* $M_0(t_0 = \frac{\pi}{3})$.

c) *Să se determine planele reperului Frenet în punctul* M_0.

d) *Să se determine curbura şi torsiunea în* $M\,(t)$ *şi în* M_0.

e) *Să se determine versorii reperului Frenet în parametrizarea dată şi în parametrizarea naturală determinată la a) (comparaţie cu* M_0*).*

f) *Sistemele*

$$\begin{cases} F^1(x^1, x^2, x^3) = x^1 - \cos \frac{x^3}{3} = 0, \\ F^2(x^1, x^2, x^3) = x^2 - \sin \frac{x^3}{3} = 0, \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} G^1(x^1, x^2, x^3) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \\ G^2(x^1, x^2, x^3) = x^1 \operatorname{tg} \frac{x^3}{3} - x^2 = 0, \end{cases}$$

pot reprezenta acelaşi arc elementar de curbă Γ?

g) *Să se scrie ecuaţiile dreptei tangente în M_0 pentru cele două reprezentări implicite ale unui arc elementar din Γ, vecinătate a lui M_0.*

Soluţie. a) Avem

$$\bar{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 3), |\bar{r}'(t)| = \sqrt{10}$$

şi

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{10}dt = t\sqrt{10}.$$

Rezultă $t = \frac{s}{\sqrt{10}}$ iar o parametrizare naturală se scrie

$$\bar{\rho}(s) = \bar{r}(t(s)) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{10}}, \sin\frac{s}{\sqrt{10}}, \frac{3s}{\sqrt{10}}\right).$$

b) Avem

$$\begin{aligned} \bar{r}''(t) &= (-\cos t, -\sin t, 0), \\ \bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) &= (3\sin t, -3\cos t, 1), \\ (\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)) \times \bar{r}'(t) &= (-10\cos t, -10\sin t, 0). \end{aligned}$$

Dreapta tangentă în punctul M_0 are ecuaţiile:

$$\frac{x^1 - \frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{x^3 - \pi}{3}.$$

Dreapta binormala are ecuaţiile:

$$\frac{x^1 - \frac{1}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{x^3 - \pi}{1},$$

iar dreapta normală principală are ecuaţiile:

$$\frac{x^1 - \frac{1}{2}}{-\frac{10}{2}} = \frac{x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{10\sqrt{3}}{2}}, x^3 - \pi = 0.$$

c) Ecuaţia planului osculator în punctul M_0:

$$\begin{vmatrix} x^1 - \frac{1}{2} & x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} & x^3 - \pi \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

sau, echivalent,

$$\frac{3}{2}\sqrt{3}x^1 - \frac{3}{2}x^2 + x^3 - \pi = 0.$$

Ecuaţia planului normal:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x^1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(x^3 - \pi\right) = 0.$$

Ecuaţia planului rectificant

$$-\frac{10}{2}\left(x^1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{10\sqrt{3}}{2}\left(x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

d) $k_1(t) = \frac{1}{10} = k_1(\frac{\pi}{3})$, $k_2(t) = \frac{3}{10}$.
e) Versorii reperului Frenet în punctul M_0 sunt: versorul dreptei tangenta

$$\bar{\tau}_0 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}, \frac{1}{2\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right),$$

versorul binormalei

$$\bar{\beta}_0 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}, -\frac{3}{2\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right),$$

versorul normalei principale

$$\bar{\nu}_0 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

f) Notăm

$$C_1 = \left\{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3, F^1(x^1, x^2, x^3) = 0, F^2(x^1, x^2, x^3) = 0\right\},$$

şi

$$C_2 = \left\{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3, G^1(x^1, x^2, x^3) = 0, G^2(x^1, x^2, x^3) = 0\right\}.$$

Matricea Jacobiană

$$J(F^1, F^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}\sin\frac{x^3}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}\cos\frac{x^3}{3} \end{pmatrix}$$

are rangul 2 în orice punct al mulţimii C_1. Deci C_1 defineşte un arc de curbă regulată care poate fi parametrizată prin

$$\bar{c}_1(t) = (\cos t, \sin t, 3t), t \in \mathbf{R}.$$

Matricea Jacobiană asociată lui C_2,

$$J(G^1, G^2) = \begin{pmatrix} 2x^1 & 2x^2 & 0 \\ tg\frac{x^3}{3} & -1 & \frac{x^1}{3\cos^2\frac{x^3}{3}} \end{pmatrix}$$

are rangul 2 în orice punct al mulţimii C_2. Deci C_2 defineşte un arc de curbă regulată în vecinătatea fiecărui punct al său. Să observăm că C_2 conţine două curbe, care pot fi parametrizate prin

$$\bar{c}_1(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$$

şi

$$c_2(t) = (-\cos t, -\sin t, 3t), t \in \mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}.$$

Cele două sisteme pot reprezenta acelaşi arc elementar de curbă Γ în vecinăratea oricărui punct $\bar{r}(t) \in \Gamma$, $t \in \mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

g) Ecuaţiile dreptei tangente în M_0 la curba Γ pentru prima rerezentare implicită

$$\frac{x^1 - \frac{1}{2}}{\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3} \end{vmatrix}} = \frac{x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3} \end{vmatrix}} = \frac{x^3 - \pi}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}},$$

sau, echivalent,

$$\frac{x^1 - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{x^3 - \pi}{1}.$$

Ecuaţiile dreptei tangente în M_0 la curba Γ pentru a doua rerezentare implicită

$$\frac{x^1 - \frac{1}{2}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ -1 & \frac{\frac{1}{2}}{3\cos^2\frac{\pi}{3}} \end{vmatrix}} = \frac{x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3} & \frac{\frac{1}{2}}{3\cos^2\frac{\pi}{3}} \end{vmatrix}} = \frac{x^3 - \pi}{\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3} & -1 \end{vmatrix}},$$

sau, echivalent,

$$\frac{x^1 - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3\sqrt{3}}} = \frac{x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{2}{3}} = \frac{x^3 - \pi}{-4}.$$

E 3.2 *Se consideră elicea conică Γ dată prin parametrizarea*

$$\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3, \bar{\mathbf{r}}\,(t) = (t\cos t, t\sin t, 3t).$$

Se cere:

a) *Să se determine o parametrizare naturală.*

b) *Să se determine axele (ca drepte) reperului Frenet pentru punctul* $M_0(t_0 = \pi)$.

c) *Să se determine planele reperului Frenet în punctul* M_0.

d) *Să se determine curbura şi torsiunea în* $M\,(t)$ *şi în* M_0.

e) *Să se determine versorii reperului Frenet în parametrizarea dată şi în o parametrizare naturală (comparaţie cu* M_0*).*

f) *Sistemul*

$$\begin{cases} F^1(x^1,x^2,x^3) = x^1 \operatorname{tg} \frac{x^3}{3} - x^2 = 0, \\ F^2(x^1,x^2,x^3) = \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 - \dfrac{(x^3)^2}{9} = 0, \end{cases}$$

reprezintă un arc elementar al curbei Γ, *vecinătate a punctului* M_0?

g) *Să se scrie ecuaţiile dreptei tangente* $\hat{\imath}$*n* M_0 *pentru reprezentarea implicită a unui arc elementar din* Γ, *vecinătate a lui* M_0.

Soluţie. a) Avem

$$\bar{r}'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 3)\,, |\bar{r}'(t)| = \sqrt{t^2+10}$$

şi

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{t^2+10}dt = \frac{1}{2}\sqrt{(t^2+10)}t + 5\operatorname{arcsin}\frac{t}{\sqrt{10}}.$$

O parametrizare naturală este $\bar{\rho}(s) = \bar{r}(t(s))$.

b) Avem

$$\bar{r}''(t) = (-2\sin t - t\cos t, 2\cos t - t\sin t, 0)\,,$$

şi

$$\begin{aligned} \bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \cos t - t\sin t & \sin t + t\cos t & 3 \\ -2\sin t - t\cos t & 2\cos t - t\sin t & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-6\cos t + 3t\sin t, -6\sin t - 3t\cos t, t^2+2), \end{aligned}$$

iar $(\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)) \times \bar{r}'(t) = (-20\sin t - 11t\cos t - t^2\sin t - t^3\cos t, 20\cos t - 11t\sin t + t^2\cos t - t^3\sin t, -3t)$,

$$\bar{r}'''(t) = (-3\cos t + t\sin t, -3\sin t - t\cos t, 0)$$

Dreapta tangentă în punctul M_0 are ecuaţiile:

$$\frac{x^1 - \pi}{-1} = \frac{x^2}{-\pi} = \frac{x^3 - 3\pi}{3}.$$

Dreapta binormala are ecuaţiile:

$$\frac{x^1 - \pi}{6} = \frac{x^2}{3\pi} = \frac{x^3 - 3\pi}{\pi^2 + 2},$$

iar dreapta normală principală are ecuaţiile:

$$\frac{x^{11} - \pi}{\pi^3 + 11\pi} = \frac{x^2}{-\pi^2 - 20} = \frac{x^3 - 3\pi}{-3\pi}.$$

c) Ecuaţia planului osculator în punctul M_0:

$$\begin{vmatrix} x^1 - \pi & x^2 & x^3 - 3\pi \\ -1 & -\pi & 3 \\ \pi & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

au, echivalent,

$$6x^1 + 3\pi x^2 + x^3(2 + \pi^2) - 12\pi = 0.$$

Ecuaţia planului normal în punctul M_0:

$$-\left(x^1 - \pi\right) - \pi x^2 + 3\left(x^3 - 3\pi\right) = 0.$$

Ecuaţia planului rectificant în punctul M_0 :

$$\pi\left(x^1 - \pi\right) - 2x^2 = 0.$$

d) $k_1(t) = \frac{\sqrt{t^4+13t^2+40}}{\sqrt{t^2+10}^3}$, $k_2(t) = \frac{3t^2+18}{t^4+13t^2+40}$.

e) Versorii reperului Frenet în punctul M_0 sunt: versorul dreptei tangenta

$$\bar{\tau}_0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{\pi^2+10}}, \frac{-\pi}{\sqrt{\pi^2+10}}, \frac{3}{\sqrt{\pi^2+10}}\right),$$

versorul binormalei

$$\bar{\beta}_0 = \left(\frac{6}{\sqrt{\pi^4 + 13\pi + 40}}, \frac{3\pi}{\sqrt{\pi^4 + 13\pi + 40}}, \frac{\pi^2 + 2}{\sqrt{\pi^4 + 13\pi + 40}} \right),$$

versorul normalei principale

$$\bar{\nu}_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi^6 + 23\pi^4 + 170\pi^2 + 400}} \left(\pi^3 + 11\pi, -\pi^2 - 20, -3\pi \right).$$

f) Notăm

$$C = \left\{ (x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3, F^1(x^1, x^2, x^3) = 0, F^2(x^1, x^2, x^3) = 0 \right\}.$$

Matricea Jacobiană

$$J(F^1, F^2)(M_0) = \begin{pmatrix} \operatorname{tg} \frac{x^3}{3} & -1 & \frac{x^1}{3\cos^2 \frac{x^3}{3}} \\ 2x^1 & 2x^2 & \frac{2x^3}{9} \end{pmatrix} (M_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{\pi}{3} \\ -2\pi & 0 & \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

are rangul 2. Deci C defineşte un arc de curbă regulată în vecinătatea punctului M_0.

g) Ecuaţiile dreptei tangente în M_0 la curba Γ pentru rerezentarea implicită

$$\frac{x^1 - \pi}{\begin{vmatrix} -1 & \frac{\pi}{3} \\ 0 & \frac{2\pi}{3} \end{vmatrix}} = \frac{x^2}{-\begin{vmatrix} 0 & \frac{\pi}{3} \\ -2\pi & \frac{2\pi}{3} \end{vmatrix}} = \frac{x^3 - 3\pi}{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2\pi & 0 \end{vmatrix}},$$

sau, echivalent,

$$\frac{x^1 - \pi}{-\frac{2\pi}{3}} = \frac{x^2}{-\frac{2\pi^2}{3}} = \frac{x^3 - 3\pi}{-2\pi}.$$

E 3.3 *Se consideră elicea circulară γ definită de parametrizarea*

$$\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3, \bar{\mathbf{r}}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt),$$

a, b constante reale nenule.

a) *Să se scrie ecuaţiile axelor şi planelor triedrului Frenet ataşat elicei în punctul curent şi să se determine versorii triedrului Frenet.*

b) *Să se arate că tangentele elicei fac un unghi constant cu generatoarele suprafeţei cilindrice pe care este situată elicea.*

c) *Să se arate că normalele principale ale elicei sunt perpendiculare pe generatoarele suprafeţei cilindrice pe care este situată elicea.*

d) *Să se arate că binormalele elicei fac un unghi constant cu generatoarele suprafeţei cilindrice pe care este situată elicea.*

e) *Să se arate că raportul dintre curbură şi torsiunea curbei γ este constant.*

Soluţie. a) Avem

$$\begin{aligned}
\bar{r}'(t) &= (-a\sin t, a\cos t, b), |\bar{r}'(t)| = \sqrt{a^2+b^2},\\
\bar{r}''(t) &= (-a\cos t, -a\sin t, 0),\\
\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t) &= (ab\sin t, -ab\cos t, a^2),\\
(\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t))\times\bar{r}'(t) &= (-a(a^2+b^2)\cos t, -a(a^2+b^2)\sin t, 0),\\
\bar{r}'''(t) &= (a\sin t, -a\cos t, 0).
\end{aligned}$$

Dreapta tangentă în punctul $M_0(t)$ are ecuaţiile:

$$\frac{x^1 - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{x^2 - a\sin t}{a\cos t} = \frac{x^3 - bt}{b}.$$

Dreapta binormala are ecuaţiile:

$$\frac{x^1 - a\cos t}{ab\sin t} = \frac{x^2 - a\sin t}{-ab\cos t} = \frac{x^3 - bt}{a^2},$$

iar dreapta normală principală are ecuaţiile:

$$\frac{x^1 - a\cos t}{-\cos t} = \frac{x^2 - a\sin t}{-\sin t}, x^3 - bt = 0.$$

Ecuaţia planului osculator în punctul $M_0(t)$:

$$\begin{vmatrix} x^1 - a\cos t & x^2 - a\sin t & x^3 - bt \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

sau, echivalent,

$$bx^1\sin t - bx^2\cos t + a(x^3 - bt) = 0.$$

Ecuaţia planului normal:

$$-a\sin t\left(x^1 - a\cos t\right) + a\cos t\left(x^2 - a\sin t\right) + b\left(x^3 - bt\right) = 0,$$

sau, ecivalent,

$$-ax^1\sin t + ax^2\cos t + b\left(x^3 - bt\right) = 0.$$

Ecuaţia planului rectificant

$$-\cos t\left(x^1 - a\cos t\right) - \sin t\left(x^2 - a\sin t\right) = 0,$$

sau, echivalent

$$x^1\cos t + x^2\sin t - a^2 = 0$$

.

Versorii reperului Frenet în punctul $M_0(t)$ sunt: versorul dreptei tangenta

$$\bar{\tau} = \left(-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

versorul binormalei

$$\bar{\beta} = \left(\frac{b\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{b\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

versorul normalei principale

$$\bar{\nu} = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

b) Curba γ este situată pe cilindrul $(x^1)^2+(x^2)^2 = 1$, ale cărui generatoare au vectorul director $\bar{e}_3$. Unghiul dintre dreapta tangentă la γ în punctul $M_0(t)$ şi generatoare este unghiul determinat de vectorii $\bar{r}'(t)$ şi $\bar{e}_3$. Cum

$$\cos(\widehat{\bar{r}'(t), \bar{e}_3}) = \frac{\bar{r}'(t)\cdot\bar{e}_3}{|\bar{r}'(t)|\cdot|\bar{e}_3|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

deducem că $(\widehat{\bar{r}'(t), \bar{e}_3})$ este constant.

c) Unghiul dintre dreapta normală princială la γ în punctul $M_0(t)$ şi generatoarea cilindrului este unghiul determinat de vectorii $\bar{\nu}(t)$ şi $\bar{e}_3$. Cum

$$\cos(\widehat{\bar{v}, \bar{e}_3}) = \bar{\nu}(t)\cdot\bar{e}_3 = 0,$$

deducem că dreapta normală principală este perpendiculară pe generatoare.

d) Unghiul dintre dreapta binormală la γ în punctul $M_0(t)$ şi generatoare este unghiul determinat de vectorii $\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)$ şi $\bar{e}_3$. Cum

$$\cos(\widehat{\bar{\beta}(t), \bar{e}_3}) = \bar{\beta}(t)\cdot\bar{e}_3 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

deducem concluzia.

e) Avem

$$\begin{aligned} |\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)| &= a\sqrt{a^2+b^2}, \\ [\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t)] &= a^2 b, \end{aligned}$$

deci

$$k_1(t) = \frac{a}{a^2+b^2} \text{ şi } k_2(t) = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

3.2 Exerciţii propuse

E 3.4 *Fie curba* Γ *definită de parametrizarea*

$$\mathbf{r} : (0, \infty) \to \mathbf{R}^3, \bar{\mathbf{r}}(t) = \left(2t, t^2, \ln t\right).$$

a) *Să se scrie ecuaţiile axelor şi planelor triedrului Frenet în punctul* $P(2, 1, 0)$.

b) *Să se calculeze curbura şi torsiunea curbei* Γ *în punctul* P.

E 3.5 *Se consideră curba* Γ, *definită de parametrizarea*

$$\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3, \bar{\mathbf{r}}(t) = (2t - 1, t^3, 1 - t^2).$$

a) Să se determine curbura şi torsiunea curbei în punctul $M_0(-1, 0, 1)$, *ecuaţiile muchiilor şi feţelor triedrului Frenet ataşat curbei în acest punct.*

b) Să se determine punctele curbei în care planul osculator este perpendicular pe planul $7x - 12y + 5z - 1 = 0$.

Seminarul 4

Formulele lui Frenet

4.1 Exerciţii propuse

E 4.1 *Demonstraţi formulele lui Frenet pentru o curbă plană.*

E 4.2 *Să se verifice formulele lui Frenet pentru elicea* Γ *definită de parametrizarea* $\mathbf{r}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$, $\bar{\mathbf{r}}(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$.

E 4.3 *Fie* γ *o curbă definită prin parametrizarea* $\mathbf{r}: I\to\mathbf{R}^3$ *având curbura şi torsiunea nenule. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) *tangentele fac un unghi constant cu o direcţie fixă;*

b) *normalele principale sunt perpendiculare pe o direcţie fixă;*

c) *binormalele fac un unghi constant cu o direcţie fixă;*

d) *raportul dintre curbură şi torsiune este constant.*

O curbă γ care are una dintre aceste proprietăţi se numeşte *elice*.

E 4.4 *Să se arate că o elice pentru care curbura este constantă este o elice cilindrică.*

E 4.5 *Să se arate că o elice pentru care* $k_1(s)=\frac{m}{s}$, *unde* m *este o constantă, este o elice conică.*

E 4.6 *Să se demonstreze că următoarele curbe, definite prin parametrizarea* $\mathbf{r}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$, *sunt elice*

a) $\bar{\mathbf{r}}(t)=\left(a(t-\sin t), a(1-\cos t), 4a\cos\frac{t}{2}\right)$;

b) $\bar{\mathbf{r}}\,(t) = (a(3t - t^3), 3at^2, a(3t + t^3))\,.$

E 4.7 *Se consideră curba* Γ *definită de parametrizarea* $\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $\bar{\mathbf{r}}\,(t) = \left(t, t^2, \frac{2t^3}{3}\right)$. *În punctul* $M_0(t = 1)$ *se cere:*

a) *să se determine versorii reperului Frenet;*

b) *să se calculeze curbura şi torsiunea;*

c) *să se verifice formulele lui Frenet;*

d) *să se arate că* Γ *este o elice.*

E 4.8 *Se numeşte curbă Ţiţieca o curbă* γ *pentru care raportul* $\frac{d^2}{k_2}$ *este constant, unde* k_2 *este torsiunea curbei în punctul curent* M, *iar* d *este distanţa de la un punct fix la planul osculator în punctul* M. *Să se arate că curba definită prin parametrizarea*

$$\mathbf{r} : (0, \infty) \to \mathbf{R}^3 \bar{\mathbf{r}}\,(t) = \left(at, bt^2, \frac{1}{abt^3}\right),$$

cu a, b *constante nenule, este o curbă Ţiţeica, punctul fix fiind originea* O.

E 4.9 *Să se demonstreze că curba* Γ *definită de parametrizarea* $\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$,

$$\bar{\mathbf{r}}\,(t) = \left(e^t \cos(t\sqrt{3}), e^t \sin(t\sqrt{3}), e^{-2t}\right),$$

este o curbă Ţiţeica.

Seminarul 5

Teoremele fundamentale ale teoriei diferenţiale a curbelor

5.1 Exerciţii rezolvate

E 5.1 *Să se determine o curbă plană* γ *pentru care se cunoaşte curbura* $k_1(s) = f(s)$, $f \in C(\mathbf{R})$, $f(s) \geq 0$, $\forall s \in \mathbf{R}$.

Soluţie. Fie $r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\bar{r}(s) = (x(s), y(s))$ o parametrizare naturală a curbei γ şi $\varphi(s)$ unghiul determinat de axa Ox cu tangenta la curba γ în punctul $r(s)$. Atunci

$$\frac{d\varphi}{ds} = k_1(s).$$

Prin integrare deducem

$$\varphi(s) = \int_0^s f(s)ds + \varphi_0,$$

unde φ_0 este o constantă. Cum $\bar{\tau}(s) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right)$ şi φ este unghiul dintre vectorii $\bar{\tau}$ şi $\bar{i}$, versorul axei Ox, deducem

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \frac{dy}{ds} = \sin\varphi.$$

Prin integrare rezultă

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \cos\varphi(s)ds + x_0, \\ y(s) &= \int_0^s \sin\varphi(s)ds + y_0, \end{aligned}$$

x_0, y_0 fiind constante reale. Notând $\Phi(s) = \int_0^s f(s)ds$,

$$\begin{cases} X(s) = \int_0^s \cos\Phi(s)ds, \\ Y(s) = \int_0^s \sin\Phi(s)ds, \end{cases} \tag{5.1}$$

se obţine

$$\begin{cases} x(s) = X(s)\cos\varphi_0 - Y(s)\sin\varphi_0 + x_0, \\ y(s) = X(s)\sin\varphi_0 + Y(s)\cos\varphi_0 + y_0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Formulele (5.1) constituie ecuaţiile parametrice ale unei curbe plane γ_0, iar formulele (5.2) reprezintă ecuaţiile parametrice ale unei curbe γ. Cele două curbe au aceeaşi curbură, $k_1(s)$. Să observăm că γ este imaginea curbei γ_0 printr-o izometrie de tipul I.

E 5.2 *Să se determine curba plană* Γ, *regulată, a cărei curbură este*

a) $k_1(s) = 0$;

b) $k_1(s) = a$, *unde* a *este o constantă reală pozitivă;*

c) $k_1(s) = \frac{a}{a^2+s^2}$;*unde* a *este o constantă reală strict pozitivă;*

d) $k_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2as}}$, $s > 0$, *şi* $a > 0$ *este o constantă reală.*

Soluţie. a) Avem

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \int_0^s k_1(s)ds = 0, \\ X(s) &= \int_0^s \cos 0 ds = \int_0^s 1 ds = s, \\ Y(s) &= \int_0^s \sin 0 ds = 0. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{cases} x(s) = s\cos\varphi_0 + x_0, \\ y(s) = s\sin\varphi_0 + y_0. \end{cases}.$$

Curba Γ este inclusă într-o dreaptă.

b) Avem

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \int_0^s k_1(s)ds = \int_0^s a ds = as, \\ X(s) &= \int_0^s \cos as ds = \frac{1}{a}\sin as, \\ Y(s) &= \int_0^s \sin as ds = \frac{1}{a}(1 - \cos as). \end{aligned}$$

Curba Γ este inclusă într-un cerc de rază a.

c) Avem

$$\begin{aligned}
\Phi(s) &= \int_0^s k_1(s)ds = \int_0^s \frac{a}{a^2+s^2}ds = \arctan\frac{s}{a},\\
X(s) &= \int_0^s \cos\arctan\frac{s}{a}ds = \int_0^s \frac{a}{\sqrt{a^2+s^2}}\\
&= a\ln\left(\frac{\cos\arctan\frac{s}{a}}{1+\sin\arctan\frac{s}{a}}\right) = a\left(\ln a - \ln\left(\sqrt{(a^2+s^2)}+s\right)\right),\\
Y(s) &= \int_0^s \sin\arctan\frac{s}{a}ds = \int_0^s \frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}} = \sqrt{(a^2+s^2)} - a.
\end{aligned}$$

d) Avem

$$\begin{aligned}
\Phi(s) &= \int k_1(s)ds = \int \frac{1}{\sqrt{2as}}ds = \sqrt{\frac{2s}{a}},\\
X(s) &= \int \cos\sqrt{\frac{2s}{a}}ds = a\cos\sqrt{\frac{2s}{a}} + \sqrt{2as}\sin\sqrt{\frac{2s}{a}},\\
Y(s) &= \int \sin\sqrt{\frac{2s}{a}}ds = a\sin\sqrt{\frac{2s}{a}} - \sqrt{2as}\cos\sqrt{\frac{2s}{a}}.
\end{aligned}$$

E 5.3 *Să se arate că dacă o curbă spaţială regulată Γ are curbura zero atunci curba Γ este inclusă într-o dreaptă.*

Soluţie. Fie $\rho : I \to \mathbf{R}^3$, o parametrizare naturală a curbei Γ. Din Prima ormulă a lui Frenet (F1) deducem $\dot{\bar{\tau}} = k_1(s)\bar{\nu}$, deci $\dot{\bar{\tau}} = \bar{0}$. Rezultă $\bar{\tau}(s) = \bar{c}_1$, unde $\bar{c}_1 \in \vec{\mathbf{R}}^3$ este un vector constant. Cum $\bar{\tau}(s) = \frac{d\bar{\rho}}{ds}$, prin integrare deducem $\bar{\rho}(s) = s\bar{c}_1 + \bar{c}_2$, unde $\bar{c}_2 \in \vec{\mathbf{R}}^3$ este un vector constant. Curba Γ este inclusă în dreapta determinată de punctul $M(\bar{c}_2)$ şi de vectorul director $\bar{c}_1$.

E 5.4 *Să se arate că dacă o curbă spaţială regulată are curbura constantă, nenulă, şi torsiunea constantă nulă, atunci curba este inclusă într-un cerc.*

Soluţie. Fie $\rho : I \to \mathbf{R}^3$, o parametrizare naturală a curbei Γ şi $k_1(s) = a$, constant, $k_2(s) = 0$. Torsiunea fiind nulă, curba Γ este inclusă într-un plan (α).

Formulele lui Frenet se scriu

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\tau}} &= a\bar{\nu},\\
\dot{\bar{\nu}} &= -a\tau,\\
\dot{\bar{\beta}} &= 0.
\end{aligned}$$

Derivând (F1) deducem $\ddot{\bar{\tau}} + a^2\bar{\tau} = \bar{0}$. Rezultă

$$\begin{aligned}\bar{\tau}(s) &= \bar{c}_1 \cos as + \bar{c}_2 \sin as,\\ \bar{\nu}(s) &= \bar{c}_2 \cos as - \bar{c}_1 \sin as,\end{aligned}$$

unde $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \in \vec{\mathbf{R}}^3$ sunt vectori constanţi. Deoarece $\bar{\tau}$ şi $\bar{\nu}$ sunt versori ortogonali, deducem $\bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2 = 0$, $|\bar{c}_1| = |\bar{c}_2| = 1$. Cum $\bar{\tau}(s) = \frac{d\bar{\rho}}{ds}$, prin integrare deducem

$$\bar{\rho}(s) = \frac{1}{a}\bar{c}_1 \sin as - \frac{1}{a}\bar{c}_2 \cos as + \bar{c}_3,$$

unde $\bar{c}_3 \in \vec{\mathbf{R}}^3$ este un vector constant şi avem

$$|\bar{\rho}(s) - \bar{c}_3| = \frac{1}{a}\,|\bar{c}_1| = \frac{1}{a}.$$

Rezultă că curba Γ este inclusă într-un cerc, intersecţie dintre sfera de rază $\frac{1}{a}$ şi centrul în punctul $C(\bar{c}_3)$ şi planul (α).

E 5.5 *Se consideră curba definită de parametrizarea*

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \begin{cases} (t, t^4, 0), t < 0,\\ (0,0,0), t = 0,\\ (t, 0, t^4), t > 0.\end{cases}$$

a) *Arătaţi că această parametrizare este regulată de clasă* C^3.

b) $k_1(t) = 0$ *dacă şi numai dacă* $t = 0$.

c) $k_2(t) = 0$, $\forall t \neq 0$.

E 5.6 *Fie* $(I, \mathbf{r}) = \bar{\mathbf{r}}(t)$, $\bar{\mathbf{r}} : I \to \mathbf{R}^3$ *o curbă parametrizată regulată. Dacă* $k_1(t) \neq 0$, $k_2(t) = 0$, *pentru orice* $t \in I$, *atunci curba este conţinută într-un plan.*

E 5.7 *Să se determine curba* $\gamma : \bar{\mathbf{r}} = \bar{\rho} = \bar{c} = \bar{c}(s)$ *din spaţiul euclidian* $\mathcal{E}_3$ *raportat la un reper ortonormat, care are curbura şi torsiunea constante, egale cu* $\frac{1}{2}$, *ştiind că reperul Frenet asociat curbei* γ *în punctul* $M_0(1,0,0) \in \gamma$, *corespunzător lui* $s = 0$, *este determinat de vectorii*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{t_0} &= \overrightarrow{\tau_0}\left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\\ \bar{n}_0 &= \bar{\nu}_0(-1,0,0),\\ \bar{b}_0 &= \bar{\beta}_0\left(0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

Să se demonstreze apoi că normala principală în fiecare punct al curbei γ *este perpendiculară pe o direcţie fixă.*

Soluţie. Formulele lui Frenet pentru curba γ se scriu

$$\begin{aligned}(F1)\ \dot{\bar t} &= \dot{\bar\tau}= \frac{1}{2}\bar\nu,\\ (F2)\ \dot{\bar n} &= \dot{\bar\nu}= -\frac{1}{2}\bar\tau + \frac{1}{2}\bar\beta,\\ (F3)\ \dot{\bar b} &= \dot{\bar\beta}= -\frac{1}{2}\bar\nu.\end{aligned}$$

Derivând (F2) şi ţinând seama de (F1) şi (F3), rezultă

$$\ddot{\bar\nu}= -\frac{1}{2}\ \dot{\bar\tau} +\frac{1}{2}\ \dot{\bar\beta}= -\frac{1}{2}\bar\nu$$

sau

$$\ddot{\bar\nu} +\frac{1}{2}\bar\nu = 0,$$

care prin integrare dă

$$\bar\nu(s) = \bar a_1 \cos\frac{s}{\sqrt{2}} + \bar a_2 \sin\frac{s}{\sqrt{2}}. \tag{5.3}$$

În condiţii iniţiale, $s = 0$, $\bar\nu_0 = \bar\nu(0) = -\bar\imath = \bar a_1$, deci

$$\bar\nu(s) = -\bar\imath \cos\frac{s}{\sqrt{2}} + \bar a_2 \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \tag{5.4}$$

şi

$$\dot{\bar\nu}\ (s) = \bar\imath\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\frac{s}{\sqrt{2}} + \bar a_2\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\frac{s}{\sqrt{2}}.$$

Avem

$$\dot{\bar\nu}\ (0) = \bar a_2\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\bar\tau_0 + \frac{1}{2}\bar\beta_0,$$

deci

$$\bar a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar\tau_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar\beta_0 = (0, -1, 0) = -\bar\jmath,$$

şi înlocuind în (5.4) se obţine

$$\bar\nu(s) = -\bar\imath \cos\frac{s}{\sqrt{2}} - \bar\jmath \sin\frac{s}{\sqrt{2}}. \tag{5.5}$$

Se observă că $\bar{\nu}(s) \perp \bar{k}(0,0,1)$, $(\forall)\, s$, de unde ultimul răspuns. Din (F1) se obţine apoi

$$\bar{\tau}(s) = -\bar{\imath}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}} + \bar{\jmath}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{k}.$$

Cum $\dot{\bar{\rho}}\,(s) = \bar{\tau}(s)$ şi $\bar{\rho}(0) = M_0$, prin integrare rezultă

$$\bar{\rho}(s) = \bar{\imath}\cos\frac{s}{\sqrt{2}} + \bar{\jmath}\sin\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{2}}\bar{k}.$$

Curba γ este o elice cilindrică circulară.

5.2 Exerciţii propuse

E 5.8 *Se consideră curba definită de parametrizarea*

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \begin{cases} (t, t^4, 0), t < 0, \\ (0,0,0), t = 0, \\ (t, 0, t^4), t > 0. \end{cases}$$

a) *Arătaţi că această parametrizare este regulată de clasă* C^3.

b) $k_1(t) = 0$ *dacă şi numai dacă* $t = 0$.

c) $k_2(t) = 0$, $\forall t \neq 0$.

E 5.9 *Fie* $(I, \mathbf{r}) = \bar{\mathbf{r}}(t)$, $\bar{\mathbf{r}} : I \to \mathbf{R}^3$ *o curbă parametrizată regulată. Dacă* $k_1(t) \neq 0$, $k_2(t) = 0$, *pentru orice* $t \in I$, *atunci curba este conţinută într-un plan.*

E 5.10 *Să se determine o curbă* γ *ştiind că trece printr-un punct fix* O, $k_1\,(s) = k_2\,(s) = \frac{1}{s\sqrt{2}}$, *parametrul natural* s *fiind calculat începând de la punctul* O, *iar în punctul* $M_0(s=1)$, *versorii triedrului Frenet sunt*

$$\bar{\tau}_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \bar{\nu}_0\,(0,-1,0)\,, \bar{\beta}_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Seminarul 6

Puncte singulare

6.1 Exerciţii rezolvate

E 6.1 *Se consideră curba plană* Γ *definită prin parametrizarea*

$$\bar{\mathbf{r}} : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^2, \bar{\mathbf{r}}\,(t) = \left(\frac{9t^4 + 1}{9t^2}, \frac{27t^4 + 1}{27t^3} \right), t > 0.$$

Să se determine punctele singulare ale curbei Γ *şi să se precizeze natura lor.*

Soluţie. Avem

$$\bar{\mathbf{r}}'\,(t) = \left(2t - \frac{2}{9t^3}, 1 - \frac{1}{9t^4} \right).$$

Din condiţia $|\bar{\mathbf{r}}'\,(t)| = 0$ deducem că $t_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ este punct singular pentru $\bar{r}$. În punctul $t_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ avem

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}''\,(t_0) &= \left(8, 4\sqrt{3}\right), \\ \bar{\mathbf{r}}'''\,(t_0) &= \left(-24\sqrt{3}, -60\right). \end{aligned}$$

Prin urmare $t_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ este un punct singular de tip $(2, 3)$ pentru curba Γ (punct de întoarcere cuspidal de speţa I).

E 6.2 *Se consideră curba plană* Γ *definită prin parametrizarea*

$$\bar{\mathbf{r}} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, \bar{\mathbf{r}}\,(t) = \left(t^4 - t^2, t^2\right).$$

Să se determine punctele singulare ale curbei Γ *şi să se precizeze natura lor.*

Soluţie. Avem

$$\bar{\mathbf{r}}'(t) = \left(4t^3 - 2t, 2t\right).$$

Din condiţia $|\bar{\mathbf{r}}'(t)| = 0$ deducem că $t_0 = 0$ este unicul punct singular pentru $\bar{r}$. În punctul $t_0 = 0$ avem

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}''(t_0) &= (-2, 2), \\ \bar{\mathbf{r}}'''(t_0) &= (0, 0), \bar{\mathbf{r}}^{(4)}(t_0) = (24, 0). \end{aligned}$$

Prin urmare $t_0 = 0$ este un punct singular de tip $(2, 4)$ pentru curba Γ (punct de întoarcere cuspidal de speţa a II-a).

E 6.3 *Se consideră curba plană Γ definită prin parametrizarea*

$$\bar{\mathbf{r}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, \bar{\mathbf{r}}(t) = \left(t^6 - t^3, t^3\right).$$

Să se determine punctele singulare ale curbei Γ şi să se precizeze natura lor.

Soluţie. Avem

$$\bar{\mathbf{r}}'(t) = \left(6t^5 - 3t^2, 3t^2\right).$$

Din condiţia $|\bar{\mathbf{r}}'(t)| = 0$ deducem că $t_0 = 0$ este unicul punct singular pentru $\bar{r}$. În punctul $t_0 = 0$ avem

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}''(t_0) &= (0, 0), \bar{\mathbf{r}}'''(t_0) = (-6, 6), \\ \bar{\mathbf{r}}^{(4)}(t_0) &= (0, 0), \bar{\mathbf{r}}^{(5)}(t_0) = (0, 0), \bar{\mathbf{r}}^{(6)}(t_0) = (720, 0). \end{aligned}$$

Prin urmare $t_0 = 0$ este un punct singular de tip $(3, 6)$ pentru curba Γ (punct ordinar).

E 6.4 *Să se determine punctele singulare ale curbelor definite prin parametrizările următoare:*

a) $\bar{\mathbf{r}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $\bar{\mathbf{r}}(t) = \left(a(t - \sin t), a(1 - \cos t), 4a \cos \frac{t}{2}\right)$;

b) $\bar{\mathbf{r}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $\bar{\mathbf{r}}(t) = \left(\cos t \cos^2 \frac{t}{2}, \sin t \cos^2 \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2}\right)$.

Soluţie. a) Avem

$$\bar{\mathbf{r}}'(t) = \left(a(1 - \cos t), a \sin t, -2a \sin \frac{1}{2}t\right).$$

Din condiţia $|\bar{\mathbf{r}}'(t)| = 0$ deducem că $\cos t = 1$, $\sin t = 0$, $\sin \frac{1}{2}t = 0$, deci punctele

$$t_k = 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

sunt puncte singulare pentru $\bar{r}$.

b) Avem $\bar{\mathbf{r}}'(t) = \left(-\sin t \cos^2 \frac{1}{2}t - \cos t \cos \frac{1}{2}t \sin \frac{1}{2}t\right) \bar{e}_1$
$+ \left(\cos t \cos^2 \frac{1}{2}t - \sin t \cos \frac{1}{2}t \sin \frac{1}{2}t\right) \bar{e}_2 + \left(\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}t\right) \bar{e}_3$. Din condiţia $|\bar{\mathbf{r}}'(t)| = 0$ deducem că $\cos \frac{t}{2} = 0$, deci punctele

$$t_k = (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z},$$

sunt puncte singulare pentru $\bar{r}$.

6.2 Exerciţii propuse

E 6.5 *Să se determine punctele singulare ale curbelor plane definite la exerciţiile 1.6, 1.8, 1.15, 1.14, şi să se precizeze natura lor.*